Etude des équations stationnaires de Stokes et Navier-Stokes dans des domaines extérieurs

Frédéric Alliot

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Mathématiques Appliquées

présentée par

Frédéric ALLIOT

Sujet de la thèse

Etude des équations stationnaires de Stokes et Navier-Stokes dans des domaines extérieurs

Soutenue le 3 Juillet 1998 devant le jury composé de :

Président :	Jean-Claude NEDELEC
Directeur de thèse :	Chérif AMROUCHE
Rapporteurs :	Jean-Yves CHEMIN Vivette GIRAULT Jacques SIMON
Examinateurs :	Jean GIROIRE Claude LE BRIS

Pour mes parents, avec amour et admiration.
Pour mon frère, Pascal,
pour ma soeur, Emilie.
Pour Laurent.

Jean-Claude Nédélec m'a fait le grand honneur de présider le jury de cette thèse. Je souhaite lui exprimer ici mon respect et ma gratitude.

Chérif Amrouche est à l'origine de ce travail et l'a dirigé en donnant beaucoup de son temps. Son exigence de clarté et de rigueur m'a beaucoup apporté. Je lui en suis très reconnaissant comme du soutien qu'il m'a témoigné lors de moments décisifs.

Je suis très honoré que Jean-Yves Chemin, Vivette Girault et Jacques Simon aient accepté de rédiger un rapport sur mon travail. Leur patience et leurs conseils appellent mes sincères remerciements.

Je remercie vivement Jean Giroire d'avoir participé au jury et de ses encouragements.

Claude Le Bris a suivi avec attention la progression de mon travail. Il a su être à l'écoute de mes préoccupations et ses conseils m'ont été précieux. Il m'a enfin honoré de sa présence dans le jury. Pour tout cela et aussi pour sa sympathie quotidienne, je lui dis merci.

J'ai eu la chance d'effectuer ma thèse au CERMICS. Je suis reconnaissant à Bernard Larrouturou et à Bernard Lapeyre de m'avoir permis de bénéficier des conditions de travail remarquables de ce laboratoire. Le soutien chaleureux de mes collègues, leur gentillesse et leurs encouragements ont aussi contribué à l'aboutissement de cette thèse; je les en remercie.

Jean-Frédéric Gerbeau m'a fait cadeau de son amitié. Je ne sais que lui dire merci.

Pour leur sympathie lors de mon passage à l'université d'Amiens, je remercie Stéphane Ducay, Dominique Schneider, Louis Pernas ainsi que toute l'équipe des ATER de mathématiques.

Je voudrais aussi remercier Véronique Serre, Imane Hamade et Sylvie Petit dont le sourire et la disponibilité ont rendu mon travail au CERMICS encore plus agréable.

Enfin, mes remerciements vont à tous ceux qui m'ont accompagné, de près ou de loin, ces dernières années.

Table des matières

Introduction

La modélisation des écoulements fluides a connu au dix-neuvième siècle une avancée considérable. Les équations dérivées par L.M.H. Navier et C.G. Stokes, qui portent aujourd'hui leurs noms, en sont sans aucun doute la trace la plus marquante. Celles-ci gouvernent l'évolution du champ de vitesses $\boldsymbol{u}$ et de la pression π dans un fluide homogène incompressible soumis à des forces extérieures. Elles tiennent compte d'une part des propriétés de transport des particules fluides déjà mises en équation par Euler. D'autre part, elles décrivent de plus les pertes d'énergie cinétique dues aux "frictions" entre particules qui produisent en contrepartie de la chaleur. Ce phénomène se traduit mathématiquement par l'introduction d'un terme de dissipation dont l'intensité est quantifiée par un coefficient $\nu > 0$, dit viscosité cinématique. Pour un fluide de densité 1, on obtient alors le système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\pi &= \boldsymbol{f}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0. \end{aligned}$$

Ce modèle, relativement simple du point de vue physique, est pertinent pour décrire nombre de situations réelles. Pour le mathématicien, il reste source de multiples questions, malgré des progrès conséquents dans les cinquante dernières années. Pour un large panorama des résultats classiques et des problèmes ouverts, nous invitons le lecteur à consulter par exemple R. Temam [66] et P.L. Lions [51]. Dans ce travail, nous nous efforçons, à notre mesure, d'apporter une meilleure compréhension de quelques aspects mathématiques liés à ces équations.

Etant donné un ouvert borné régulier Ω' et Ω le complémentaire de son adhérence, nous considérons plus précisément, en dimension 2 ou 3, le problème stationnaire :

$$(NS) \qquad \begin{aligned} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\pi &= \boldsymbol{f} && \text{dans} \quad \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0 && \text{dans} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0} && \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

L'étude mathématique du problème (NS) a été initiée, comme celle du problème d'évolution, par les travaux des années trente de J. Leray [47, 48]. Il a notamment montré l'existence de solutions d'énergie finie, c'est à dire, telles que :

$$\nabla \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega).$$

Ajoutons de plus la condition à l'infini

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \overset{|\boldsymbol{x}|\to+\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{u}_\infty, \tag{0.1}$$

où $\boldsymbol{u}_\infty$ est un vecteur non-nul. Alors, le système régit l'écoulement stationnaire engendré par un obstacle (Ω') se déplaçant à la vitesse $-\boldsymbol{u}_\infty$ dans un fluide au repos à l'infini, vitesse et pression étant décrites dans un repère attaché à l'obstacle. La condition au bord modélise l'adhérence du fluide à l'obstacle.

La construction effectuée par J. Leray ne permet pas de prendre en compte la condition (0.1), étape qui est franchie dans les années soixante, avec les articles de R. Finn [21, 23, 22] et D.R. Smith [60, 24]. Par exemple, en dimension 3, ceux-ci établissent l'existence pour une viscosité assez grande d'une seule solution du problème (NS) satisfaisant à l'infini

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_\infty = O(r^{-1}).$$

Elle est en particulier d'énergie finie sous des hypothèses convenables de régularité et de décroissance de $\boldsymbol{f}$. De plus, pour cette solution, l'énergie dissipée par viscocité équilibre le travail des forces extérieures dans l'écoulement. Plus important encore, une étude fine de la structure asymptotique de la vitesse met en évidence la formation d'un sillage parabolique à l'arrière de l'obstacle. Ce fait est remarquable pour sa concordance qualitative avec les caractéristiques physiques de l'écoulement considéré.

La restriction sur la taille de la viscosité est ensuite levée en dimension 3 par K.I. Babenko dans [7]. En l'occurence, lorsque $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, mais $\boldsymbol{u}_\infty \neq \boldsymbol{0}$ est quelconque, les propriétés mises en évidence par R. Finn sont en fait vérifiées par toute solution d'énergie finie vérifiant (0.1). Envisageant plus récemment des forces $\boldsymbol{f}$ plus générales, des résultats comme ceux de C.G. Galdi (voir [25], Chap. IX) ou de R. Farwig [20] prolongent les précédents.

A l'exception de J. Leray, les auteurs cités ci-dessus fondent leurs démonstrations sur une étude fine du problème (NS) linéarisé autour de $\boldsymbol{u}_\infty \neq \boldsymbol{0}$. C'est à dire, en supposant $\boldsymbol{u}_\infty$ orienté selon le premier vecteur de base de $\mathbb{R}^n$ et en notant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\infty$, le problème d'Oseen :

$$\left.\begin{aligned} -\nu\Delta\boldsymbol{v} + |\boldsymbol{u}_\infty|\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{dans } \Omega,$$

$$\boldsymbol{v}_{|\partial\Omega} = -\boldsymbol{u}_\infty, \qquad \lim_{|\boldsymbol{x}|\to+\infty} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

Avec force formules de représentations et estimations *a priori*, ils obtiennent sous des hypothèses plus ou moins restrictives que le comportement asymptotique de la vitesse est donné par le développement :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\infty + H_{\boldsymbol{u}_\infty}\mathbf{F} + o(r^{-3/2+\delta}),\ \forall\delta > 0, \tag{0.2}$$

où $H_{\boldsymbol{u}_\infty}$ désigne la solution élémentaire du problème d'Oseen associé à $\boldsymbol{u}_\infty$ et $\mathbf{F}$ est la force totale exercée sur le fluide. L'information sur le sillage est alors portée par $H_{\boldsymbol{u}_\infty}$ dont le comportement asymptotique est typiquement (en dimension 3) :

$$\frac{e^{|\boldsymbol{u}_\infty|(x_1-|\,\boldsymbol{x}\,|)}}{|\,\boldsymbol{x}\,|}. \tag{0.3}$$

Nous nous intéressons pour notre part à la résolution du problème (NS) complété de la condition (0.1) avec $\boldsymbol{u}_\infty = \mathbf{0}$. Un survol rapide de la question laisse à penser que c'est un simple cas particulier des résultats décrits ci-dessus. La réalité mathématique du problème est en fait toute autre. Pour s'en convaincre, signalons que lorsque $\boldsymbol{u}_\infty \neq \mathbf{0}$, le caractère non isotrope du problème d'Oseen (en particulier, la décroissance exponentielle de $H_{\boldsymbol{u}_\infty}$ dans la plupart des directions) joue un rôle fondamental dans les propriétés obtenues. Mais lorsque $\boldsymbol{u}_\infty = \mathbf{0}$, le problème d'Oseen n'est autre que le problème de Stokes :

$$\left.\begin{aligned} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi &= \boldsymbol{f} \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{dans } \Omega,$$
$$\boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0}, \qquad \lim_{|\boldsymbol{x}|\to+\infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0},$$

qui est quant à lui isotrope. De plus, H_0 coïncide avec la solution élémentaire U du problème de Stokes, soit en dimension 3 une fonction homogène de degré -1. La décroissance exponentielle est alors perdue ce qui fait la difficulté du problème.

Néammoins, en dimension 3, l'article de R. Finn [22] apporte certains éléments de réponse au cas qui nous intéresse. Il y est établi que $\boldsymbol{f}$ étant donnée de sorte que le problème de Stokes ait une solution vérifiant $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = O(r^{-1})$, il en est de même pour le problème (NS) à condition que la viscosité ν soit suffisamment grande. Beaucoup plus récemment, G.P. Galdi et C.G. Simader ont déterminé dans [28], une forme explicite de données pour lequel cette propriété a lieu, en l'occurence :

$$\boldsymbol{f} = \operatorname{div} G, \quad (1 + |\,\boldsymbol{x}\,|^2)G(\boldsymbol{x}) \in (L^\infty(\Omega))^{3\times 3} \tag{0.4}$$

Ce résultat est complété dans [25](section IX.6) par une formule de représentation de $\boldsymbol{u}$ lorsque $\boldsymbol{f}$ est de plus dans un espace L^p avec un support compact :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x})\mathbf{F} + \int_\Omega U(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).(\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u})(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}). \tag{0.5}$$

Ici, la solution élémentaire U est homogène de degré -1, le terme intégral est en $O(r^{-1})$ à l'infini et $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = O(r^{-2})$. Une analogie complète avec le cas $\boldsymbol{u}_\infty \neq 0$, en particulier avec le développement (0.2), demanderait cependant d'établir que le terme intégral est négligeable à l'infini devant $U(\boldsymbol{x})\mathbf{F}$. Cette propriété n'est en réalité pas satisfaite, et ce, indépendamment de toute considération de régularité ou de décroissance des données. Plus précisément, nous allons démontrer l'existence, pour des forces petites et suffisamment décroissantes, d'une seule solution vérifiant $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = O(r^{-1})$ et qui admet de plus le développement à l'infini :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{x}) + o(r^{-1}). \tag{0.6}$$

Le terme dominant $\boldsymbol{h}_{\mathbf{F}}$, homogène de degré -1, est caractérisé par les équations :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{h}_{\mathbf{F}} + \operatorname{div}(\boldsymbol{h}_{\mathbf{F}} \otimes \boldsymbol{h}_{\mathbf{F}}) + \nabla \tau_{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\delta, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{h}_{\mathbf{F}} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \tag{0.7}$$

où $\tau_{\mathbf{F}}$ est une fonction homogène de degré -2 et δ est la mesure de Dirac. Nous en déduisons en particulier que $\boldsymbol{h}_{\mathbf{F}}$ ne coïncide pas avec $U\mathbf{F}$. Ce résultat souligne en particulier la singularité du cas $\boldsymbol{u}_\infty = \mathbf{0}$ par rapport au cas $\boldsymbol{u}_\infty \neq \mathbf{0}$. Signalons enfin que ces propriétés seront établies, hors la restriction sur la taille, pour des données vérifiant des conditions de régularité et de décroissance très générales.

Avant d'arriver à ces conclusions, il est naturellement nécessaire de bien maîtriser les propriétés du problème linéarisé, soit les équations de Stokes. Les deux premier chapitres de ce travail y sont consacrés.

1. Nous étudions tout d'abord dans $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, le problème un peu plus général :

$$(S) \qquad \begin{array}{c} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = g \end{array} \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n.$$

Le fait de travailler dans $\mathbb{R}^n$, ou encore dans un domaine qui n'est borné dans aucune direction est à l'origine des principales difficultés qui interviennent dans la résolution de ces équations. Pour illustrer ce fait, considérons l'équation de Poisson qui est plus simple, mais de nature semblable :

$$-\Delta u = f \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n.$$

Il est souvent possible de résoudre ce problème par convolution avec la solution élémentaire du laplacien, pour peu que cette opération ait un sens. C'est par exemple le cas si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p < n/(n-1)$. Par ailleurs, si l'on cherche une solution d'énergie finie, *i.e.* une distribution u telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad < \nabla u, \nabla \varphi > = < f, \varphi >,$$

et vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} < +\infty,$$

on est amené à chercher un espace fonctionnel sur lequel la forme bilinéaire correspondante est coercive. Lorsque l'équation est posée dans un domaine Ω borné dans au moins une direction, il est connu qu'elle admet une unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ dès que $f \in H^{-1}(\Omega)$. Dans ce cas, la coercivité de la forme associée est une conséquence de l'inégalité de Poincaré. Celle-ci n'a malheureusement pas lieu dans $\mathbb{R}^n$ et plus généralement, les espaces de Sobolev classiques ne sont pas adaptés à ce problème. Un cadre fonctionnel adéquat est en revanche donné par les espaces de Sobolev avec des poids isotropes (voir Chapitre I pour une définition). Par exemple, si $n \geq 3$, l'espace dans lequel on va obtenir la coercivité est :

$$W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n) = \{ v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ \frac{v}{(1+r^2)^{1/2}} \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \nabla v \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \}.$$

Ces espaces ont été introduits par de nombreux auteurs pour étudier en particulier l'équation de Poisson. Sans être exhaustif, nous signalons les travaux de L. Kudrjavcev [44], B. Hanouzet [35], ou M. Cantor [14] où une première famille d'espaces avec poids est utilisée. Celle-ci est ensuite généralisée avec l'introduction de poids logarithmique, notamment par M.N. Leroux [49], puis J. Giroire [33].

Schématiquement, le principe de ces espaces est de selectionner des fonctions en les comparant, ainsi que leurs dérivées à l'infini avec une fonction du type r^α dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 < p < +\infty$. En faisant varier le paramètre α, on dispose alors d'une grande liberté de choix quant au comportement à l'infini des fonctions considérées. Plus fondamental encore, les poids sont choisis de sorte que des inégalités de Hardy se substituent à l'inégalité de Poincaré défaillante dans $\mathbb{R}^n$ (voir Théorème I.1.1 ci-dessous). Ainsi, l'équation de Poisson est-elle bien posée dans ces espaces (voir B. Hanouzet [35], M. Cantor [14], puis Lockart-McOwen [52], McOwen [53] et Amrouche-Girault-Giroire [5]). Notons pour finir, que lorsque ces fonctions sont suffisamment régulières, nous savons contrôler ponctuellement leur comportement asymptotique (voir Section I.3.3).

Nous appliquons ce cadre fonctionnel à la résolution du problème (S). Plus précisément, nous caractérisons les données qui permettent de trouver une solution dans un espace avec poids donné. Pour ce faire, nous découplons les équations vérifiées par $\boldsymbol{u}$ et π de sorte que l'on est essentiellement amené à résoudre deux équations de Poisson dans $\mathbb{R}^n$. Le résultat d'existence et d'unicité obtenu (Théorème I.1.2) met naturellement en évidence le lien entre le comportement asymptotique des données et celui des solutions.

En particulier, dès que l'espace où l'on cherche une solution contient des fonctions polynomiales, l'unicité n'est plus assurée dans cet espace. Si au contraire, on impose des contraintes fortes de décroissance à la solution (typiquement, $\boldsymbol{u}$ décroit plus vite que la solution élémentaire U), alors son existence est subordonnée au fait que $\boldsymbol{f}$ et g vérifient des conditions de compatibilité (par exemple, $\boldsymbol{f}$ est d'intégrale ou de "valeur moyenne" nulle).

Nous déterminons d'autre part, toujours dans le cadre des espaces avec poids, des hypothèses faibles pour pouvoir définir la convolution des données avec la solution élémentaire du problème de Stokes. Cette approche, complémentaire de la précédente, fournit une construction explicite de certaines des solutions obtenues auparavant. Ces formules de représentation s'avèrent en particulier utiles dans l'étude du problème extérieur effectuée au Chapitre II. Mieux encore, la méthode de convolution permet d'obtenir une description optimale du comportement asymptotique des solutions lorsque les conditions de compatibilités ne sont pas satisfaites. Ceci prend la forme d'un développement asymptotique, dont l'ordre dépend de la décroissance des données (voir Théorème I.4.8). Les termes explicites de ce développement ne font intervenir que la solution élémentaire du problème de Stokes ainsi que des coefficients dépendant des données. Naturellement, ces termes disparaissent lorsque les conditions de compatibilité sont satisfaites.

Nous établissons ensuite diverses propriétés de régularité des solutions (Section I.5). Celles-ci ont pour conséquence une meilleure description des solutions en contrepartie d'hypothèses un peu plus restrictives sur les données. Le chapitre se referme sur une étude du cas limite $p = +\infty$ auquel nous étendons certaines des propriétés établies auparavant.

2. Les espaces de Sobolev avec poids constituent aussi un cadre fonctionnel adapté au problème de Stokes extérieur :

$$(S_{ext}) \qquad \begin{aligned} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla\pi &= \boldsymbol{f} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} &= g \end{aligned} \quad \text{dans} \quad \Omega, \qquad \boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}.$$

Néammoins, une difficulté supplémentaire est introduite avec la condition de bord. Pour y faire face, nous utilisons une idée développée par J. Giroire dans [33] : le problème extérieur peut être résolu en combinant les propriétés connues dans $\mathbb{R}^n$ et dans un ouvert borné. Ce principe général permet d'obtenir des résultats analogues à ceux du chapitre I pour le problème (S_{ext}), mais au prix de raisonnements plus techniques. En particulier, la question de l'unicité dans un espace avec poids donné, dont on verra qu'elle est très simple dans $\mathbb{R}^n$, nécessite beaucoup plus d'attention. Il est toutefois primordial de bien l'analyser car elle permet ensuite (par des arguments de dualité) de caractériser les conditions de compatibilité assurant l'existence de solutions décroissantes. Les méthodes utilisées s'articulent autour de trois outils :

i) l'existence et l'unicité d'une solution dans un cadre hilbertien, dues à V. Girault et A. Sequeira [32] (voir Théorème II.3.2).

ii) l'étude de problèmes prolongés à $\mathbb{R}^n$ pour lesquels on dispose de formules de représentation qui permettent de préciser la régularité à l'infini des solutions hilbertiennes pour des données à support compact.

iii) des arguments de régularité au voisinage de $\partial\Omega$, basés sur des propriétés connues du problème de Stokes sur un ouvert borné.

Nous étudions ensuite la régularité des solutions et établissons, lorsque les conditions de compatibilité ne sont pas satisfaites, un développement asymptotique des solutions.

Au cours de cette étude, nous mettons de plus en avant la spécificité du cas bidimensionnel. En effet, certaines des propriétés obtenues dans un domaine extérieur montrent des différences notables avec celles établies dans $\mathbb{R}^2$, ce qui n'est pas le cas en dimension supérieure. Ces distorsions entre les deux problèmes sont liées au "mauvais" comportement asymptotique de la solution élémentaire ($U \sim \ln r$) en dimension 2. Le paradoxe de Stokes, bien connu en hydrodynamique, en est, dans son interprétation mathématique une conséquence importante. Nous en donnerons une version généralisée.

3. Nous utilisons finalement les résultats obtenus pour le problème de Stokes pour étudier les équations de Navier-Stokes stationnaires (NS). Nous nous intéressons dans un premier temps aux propriétés des solutions d'énergie finie introduites par J. Leray dans les années trente. En dimension 3, nous déterminons des conditions faibles sur le champ de forces $\boldsymbol{f}$ pour que ces solutions s'annulent à l'infini. A notre connaissance, nous améliorons en cela les conditions introduites dans la littérature antérieure. Ceci nécessite d'étudier le terme non-linéaire $\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}$ pour pouvoir appliquer ensuite les résultats de régularité connus sur le problème de Stokes. Signalons à ce sujet qu'à ce jour, on ne sait pas s'il est possible d'obtenir une décroissance plus rapide sans restriction sur la taille des données. Pour des forces $\boldsymbol{f}$ plus régulières, nous obtenons de même des conditions pour que, de plus, le gradient de la vitesse ainsi que la pression s'annulent à l'infini.

Les propriétés du terme non-linéaire en dimension 2, ne permettent pas de suivre la même démarche pour des données générales. Cependant, nous exploitons une simplification, sous des conditions de symétrie, des équations de Navier-Stokes en coordonnées polaires. Ceci nous amène à étudier une classe particulière de solutions du problème (NS) pour des données vérifiant une contrainte de symétrie. Les solutions d'énergie finie dont nous établissons l'existence sont de plus remarquables par le fait que la vitesse dépend linéairement de $\boldsymbol{f}$, c'est à dire que l'effet non-linéaire n'affecte que la pression. Enfin, nous montrons l'unicité (dans une classe adaptée) d'une telle solution lorsque son énergie est petite.

4. Nous considérons ensuite une autre approche qui nous permet de démontrer le résultat annoncé ci-dessus. Elle consiste à déterminer, une fois posés $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}$ et $\pi_0 = 0$, des conditions sur les données pour que la récurrence

$$\begin{aligned} -\nu\Delta \boldsymbol{u}_{m+1} + \nabla\pi_{m+1} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}_m.\nabla \boldsymbol{u}_m \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u}_{m+1} = 0 \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\boldsymbol{u}_{m+1} = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \partial\Omega,$$

ait un sens et converge vers une solution du problème (NS). L'existence de cette suite est obtenue en choisissant $\boldsymbol{f}$ dans un espace avec poids dont les éléments décroissent suffisament et nécessite certains développements techniques (en particulier, la résolution d'un problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$ lorsque $\boldsymbol{f}$ est une distribution homogène de degré -3). Chaque $\boldsymbol{u}_m$ est alors typiquement de la forme

$$\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{h}_m + \boldsymbol{v}_m,$$

avec $\boldsymbol{h}_m$ homogène de degré -1 et $\boldsymbol{v}_m(\boldsymbol{x}) = o(r^{-1})$. En supposant de plus que $\boldsymbol{f}$ soit "petite", et en introduisant un espace adapté pour la suite $(\boldsymbol{u}_m, \pi_m)$, nous pouvons alors appliquer le Théorème de point fixe de Banach. En découlent simultanément et dans les normes adaptées, les convergences

$$\boldsymbol{h}_m \to \boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{v}_m \to \boldsymbol{v}, \quad \pi_m \to \pi$$

où $\boldsymbol{h}$ est homogène de degré -1 et $\boldsymbol{v}$ vérifie toujours $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = o(r^{-1})$. De plus, les limites $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{v}$ et π vérifient le problème (NS). Un développement asymptotique de $\boldsymbol{u}$ est donc établi en même temps que l'existence de la solution et non pas par une étude de régularité *a posteriori* comme c'est le plus souvent le cas.

Les solutions ainsi obtenues sont d'énergie finie. De plus, l'énergie cinétique dissipée dans l'écoulement équilibre le travail des forces, *i.e.*

$$\nu \int |\nabla \boldsymbol{u}|^2 d\boldsymbol{x} = < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} >,$$

égalité que l'on ne sait pas établir pour toute solution d'énergie finie. Cette propriété est fondamentale pour démontrer l'unicité de la solution dans l'espace où l'on a établi la convergence de la suite $\boldsymbol{u}_m$ (rappelons que l'unicité des petites solutions d'énergie finie n'est pas établie pour l'instant).

Néammoins, dans un domaine extérieur, la méthode de point fixe ne fournit rien de plus sur $\boldsymbol{h}$ que sa nature de fonction homogène dépendant continûment de la donnée $\boldsymbol{f}$. Or -nous l'avons annoncé- $\boldsymbol{h}$ ne dépend en fait que de la "force totale" $\mathbf{F}$ *via* les équations (0.7). Pour démontrer cette propriété, nous nous ramenons par un prolongement adéquat à l'étude du problème (NS) posé sur $\mathbb{R}^3$ où l'on peut utiliser la même démarche (avec des hypothèses même plus générales). Mais, on utilise de plus le fait que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{w} = \mathbf{0},$$

lorsque $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ et $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ décroissent suffisamment. En effet, dans $\mathbb{R}^3$, cette égalité traduit une condition de compatibilité pour le problème de Stokes (dans Ω, $\boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{w}$ ne vérifie pas en général la condition de compatibilité correspondante). En particulier, elle permet de démontrer que pour la suite $\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{h}_m + \boldsymbol{v}_m$ construite dans $\mathbb{R}^3$, le terme homogène $\boldsymbol{h}_m$ est déterminé par une formule de récurrence autonome vis-à-vis de $\boldsymbol{v}_m$. Alors, par passage à la limite, on déduit le problème vérifié par la limite homogène $\boldsymbol{h}$ de $\boldsymbol{h}_m$.

Avec cette méthode, qui s'applique à une large classe de données, le comportement asymptotique des solutions pour des forces petites est bien caractérisé, tandis que, même en supposant $\boldsymbol{f}$ à support compact, d'autres approches n'aboutissent pas à une description achevée (voir par exemple (0.5)).

Rappelons que nous considérons pour établir un tel résultat une force $\boldsymbol{f}$ suffisament décroissante et petite dans la norme adéquate. Il est probable que l'hypothèse de décroissance puisse être améliorée mais si c'est le cas, dans une mesure assez marginale. En revanche, la question de la taille des données reste autrement épineuse. A savoir, peut-on établir le même type de propriétés asymptotiques sans supposer $\boldsymbol{f}$ petite? La nature de la solution au premier ordre ($\boldsymbol{h}_{\mathbf{F}}$ est donné par des équations non-linéaires) laisse à penser qu'un résultat du même ordre est difficilement envisageable pour des données générales, ou fait appel à une approche complètement différente. Néammoins, il semble possible de conserver ces résultats pour des forces de taille quelconque pour le problème (NS) dans $\mathbb{R}^3$, dans certains cas particuliers. Nous développerons les techniques nécéssaires à cette extension dans des travaux ultérieurs.

Chapitre I

Le problème de Stokes dans $\mathbb{R}^n$

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous démontrons quelques résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour le problème de Stokes associé à une viscosité $\nu > 0$:

$$(S) \qquad \begin{array}{r} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = g \end{array} \quad \text{dans } \mathbb{R}^n.$$

Nous considérons plus précisément le problème suivant. Etant donnée *a priori* une condition (C) caractérisant la régularité et le comportement asymptotique des solutions, comment choisir $\boldsymbol{f}$ et g pour que le problème (S) admette une solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ vérifiant la condition (C)? De plus, lorsqu'une telle solution existe, est-elle la seule à vérifier cette condition ? Nous mettons en oeuvre, pour répondre à ces questions, diverses méthodes qui permettent de considérer une grande variété de conditions (C).

Rappelons que les espaces de Sobolev classiques ne sont pas adaptés à la résolution du problème (S) dans $\mathbb{R}^n$. Pour contourner cette difficulté, certains auteurs ont introduit les espaces :

$$\hat{H}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \text{complété de } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ pour la norme } \|\nabla\,.\,\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

et ont établi l'existence et l'unicité d'une solution

$$(\boldsymbol{u}, \pi) \in \hat{H}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 < p < +\infty$$

pour des données $(\boldsymbol{f}, g) \in \hat{H}^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ où $\hat{H}^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $\hat{H}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$ avec $1/p' = 1 - 1/p$ (voir Borchers-Miyakawa [10], Kozono-Sohr [39, 41] et [40] pour des propriétés de régularité). D'autres travaux (par exemple, Galdi-Simader [27]) fournissent des résultats comparables dans les espaces homogènes

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{v \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n), \nabla v \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Pour notre part, nous posons le problème dans des espaces de Sobolev avec poids. On introduit en particulier la fonction poids :

$$\rho(\boldsymbol{x}) = (2 + |\boldsymbol{x}|^2)^{1/2}, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

et pour tout réel p tel que $1 < p < +\infty$ et tout réel α, les espaces :

$$L^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \ \rho^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

$$W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \, \rho^{\alpha-1} u \in L^p(\mathbb{R}^n), \, \rho^\alpha \nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)\}, \ \text{si } n/p + \alpha \neq 1,$$

$$W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \ \frac{\rho^{\alpha-1}}{\ln \rho} u \in L^p(\mathbb{R}^n), \, \rho^\alpha \nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)\}, \ \text{si } n/p + \alpha = 1,$$

respectivement munis d'une structure d'espace de Banach réflexif par les normes :

$$\| u \|_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)} = \| \rho^\alpha u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\| u \|_{W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} = (\| \rho^{\alpha-1} u \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \| \rho^\alpha \nabla u \|^p_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p} \ \ \text{si } n/p + \alpha \neq 1,$$

$$\| u \|_{W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} = (\| \frac{\rho^{\alpha-1}}{\ln \rho} u \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \| \rho^\alpha \nabla u \|^p_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p} \ \ \text{si } n/p + \alpha = 1.$$

Ces espaces coïncident localement avec les espaces de Sobolev classiques mais introduisent de plus un critère de comparaison à l'infini avec les fonctions $|\boldsymbol{x}|^\alpha$. Ceci permet en particulier de considérer divers types de comportements à l'infini en faisant varier le paramètre α. Plus important encore, le choix des exposants dans la définition de $W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, et en particulier l'introduction d'un poids logarithmique dans le cas critique $n/p + \alpha = 1$, sont dictés par des inégalités généralisées de Hardy (ce sont des extensions du Théorème 330 de Hardy-Littlewood-Polya [36], voir par exemple pour une preuve de ces inégalités Kufner [45], Section 5, ou pour une présentation plus synthéthique [5], Lemme 8.1).

Théorème 1.1 (Amrouche-Girault-Giroire [5]) *Etant donnés α un réel et p tel que $1 < p < +\infty$. Il existe une constante $C = C(n, p, \alpha) > 0$, telle que*

$$\forall u \in W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n), \quad \| u \|_{W^{1,p}_\alpha} \leq C \, \| \nabla u \|_{\mathbf{L}^p_\alpha}, \quad \textit{si } n/p + \alpha > 1,$$

$$\| u \|_{W^{1,p}_\alpha / \mathcal{P}_0} \leq C \, \| \nabla u \|_{\mathbf{L}^p_\alpha}, \quad \textit{sinon.}$$

Nous sommes alors en mesure de formuler précisément notre problème : comment choisir $\boldsymbol{f}$ et g pour que le problème (S) admette une solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ dans $\mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) \times L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$? La solution est-elle unique dans cet espace ? Si α est entier, la réponse est donnée par le théorème suivant (voir ci-dessous pour les notations)

Théorème 1.2 *Soient un entier l et $p \in]1,+\infty[$ tels que*

$$n/p' \notin \{1,\ldots,l\} \quad si\ l>0 \quad et \quad n/p \notin \{1,\ldots,-l\} \quad si\ l<0. \tag{1.1}$$

Etant donné $(\boldsymbol{f},g) \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la condition de compatibilité

$$\forall (\boldsymbol{\lambda},\mu) \in N_{[l+1-n/p']}, \quad <\boldsymbol{f},\boldsymbol{\lambda}>_{\mathbf{W}_l^{-1,p}\times \mathbf{W}_{-l}^{1,p'}} + <g,\mu>_{L_l^p \times L_{-l}^{p'}} = 0, \tag{1.2}$$

le problème (S) a une solution $(\boldsymbol{u},\pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$, unique à un élément près de $N_{[1-l-n/p]}$. Il existe, de plus, une constante $C>0$ ne dépendant que de ν, n, p et l telle que :

$$\inf_{(\boldsymbol{\lambda},\mu)\in N_{[1-l-n/p]}} (\| \boldsymbol{u}+\boldsymbol{\lambda} \|_{\mathbf{W}_l^{1,p}} + \| \pi+\mu \|_{L_l^p}) \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} + \| g \|_{L_l^p}).$$

Dans cet énoncé, $W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace dual de $W_{-l}^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$ et $N_k, k \in \mathbb{Z}$ est un espace vectoriel de dimension finie que nous caractériserons ultérieurement mais qui est réduit à l'élément nul si $k<0$. Enfin, $[s]$ désigne la partie entière du réel s. Ce résultat laisse certains cas critiques ($cf.$ (1.1)) sans réponse dans le cadre proposé. Cependant, il généralise des travaux antérieurs comme Specovius Neugebauer [61, 62], ou Girault-Sequeira [31] pour le cas $n=3,\ p=2$.

Nous allons démontrer le Théorème 1.2 par des méthodes abstraites utilisant les propriétés de l'opérateur de Laplace dans $\mathbb{R}^n$ (voir [5]). Il est cependant possible de trouver une solution explicite du problème (S) :

$$\boldsymbol{u} = U * \boldsymbol{f} + F * \nabla g, \quad \pi = \mathbf{Q} * (\boldsymbol{f} - \nu \nabla g), \tag{1.3}$$

pourvu que ces convolutions aient un sens. C'est le cas, si $1-n/p-l<0$, pour tout

$$(\boldsymbol{f},g) \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n).$$

Naturellement, si la condition (1.2) n'est pas satisfaite, la solution donnée par (1.3) n'appartient pas à $\mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$. Cependant, si l'on choisit $l=n+m-1$ pour un entier naturel m quelconque et $p>n$, nous montrons que pour $|\boldsymbol{x}|$ suffisamment grand,

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leq m} \partial^{\boldsymbol{\beta}} U(\boldsymbol{x}) \mathbf{c}_{\boldsymbol{\beta}} + \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leq m} \partial^{\boldsymbol{\beta}} F(\boldsymbol{x}) \mathbf{d}_{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{w},$$

avec $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = o(|\boldsymbol{x}|^{2-n-m-n/p})$ (voir Théorèmes 4.4 et 4.8 pour plus de précisions). Cette propriété généralise substantiellement les résultats connus de représentation asymptotique des solutions qui sont jusqu'à présent obtenus pour des données à support compact. Pour obtenir de plus un développement asymptotique de π, il sera nécéssaire de considérer des données plus régulières.

Nous établissons ensuite, sous des hypothèses plus fortes, des propriétés de régularité des solutions du Théorème 1.2, en particulier des dérivées $\nabla^2 \boldsymbol{u}$ et $\nabla\pi$. On détermine aussi l'existence de solutions appartenant à une intersection d'espaces avec poids. Puis, généralisant un résultat établi en dimension 2 (mais dans une optique différente) dans Bethuel-Ghidaglia [9], nous améliorons, dans deux cas particuliers, la régularité des solutions du Théorème 1.2 en utilisant l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Observons par ailleurs que les inégalités de Hardy (et par conséquent le Théorème 1.1) ne sont pas satisfaites si $p = 1$ ou $p = +\infty$. Il est toutefois possible de généraliser quelques unes des propriétés précédentes au cas limite $p = +\infty$ (voir Section 6). Dans cette situation, certaines conditions de compatibilité introduites lorsque $p < +\infty$ n'ont plus de sens mais peuvent être remplacées par d'autres conditions adaptées.

Cependant, avant d'aborder l'étude du problème (S), nous commençons par établir quelques propriétés des opérateurs gradient et divergence. En particulier, on considère le problème suivant : étant donnée une distribution vectorielle $\boldsymbol{f}$ dans un espace de Sobolev avec poids, à quelle condition celle-ci admet-elle une primitive (*i.e.* une distribution g telle que $\nabla g = \boldsymbol{f}$) dans l'espace avec poids d'ordre supérieur. Nous établissons aussi des propriétés de densité des champs de vecteurs réguliers à divergence nulle dans les espaces avec poids (voir Théorème 2.1). Ces deux questions jouent chacune un rôle important dans l'etude des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^n$. La première permet d'obtenir la pression à partir de la formulation variationnelle vérifiée par la vitesse. La seconde intervient pour établir des propriétés d'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes (voir Temam [66], Ch.II si Ω est borné).

Rappelons finalement quelques notations et conventions. Tout au long de ce travail, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et p un réel dans l'intervalle $]1, +\infty[$. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ son dual. A tout réel $q \in\ ]1, +\infty[$, on associe son conjugué q' par la relation $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ et si $q < n$, son exposant de Sobolev q^* par la relation $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$. Nous notons $\mathcal{P}_l$ (resp. $\mathcal{P}_l^\Delta$) l'espace des polynômes (resp. polynômes harmoniques) sur $\mathbb{R}^n$ de degré inférieur ou égal à l et l'on convient que $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_l^\Delta = \{0\}$ si $l < 0$. Nous notons d'autre part $[s]$ la partie entière du réel s. Pour tout sous-espace fermé Y d'un espace de Banach X, on note X/Y l'espace quotient de X par Y et l'orthogonal de Y dans le dual X' de X :

$$X' \perp Y = \{\, f \in X',\ \forall v \in Y, < f, v >= 0 \,\} = (X/Y)'.$$

Pour alléger les notations, nous notons en gras les fonctions et distributions vectorielles à n composantes ainsi que les espaces qui s'y rapportent. Par exemple, pour $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$, on comprendra $(f_1, \ldots, f_n) \in (L^p(\mathbb{R}^n))^n$. Enfin, nous convenons que l'ensemble noté $\{1, \ldots, k\}$ est vide lorsque l'entier k est négatif ou nul.

2 Gradient et divergence

On introduit les espaces de champs de vecteurs à divergence nulle :

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n),\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = 0\} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_\alpha^{1,p} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n);\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = 0\},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nous rappelons que $W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de distributions tempérées de même que son espace dual $W_{-\alpha}^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$ (grâce à la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)$; *cf.* Hanouzet [35], Th. 1.1, si $n/p + \alpha \neq 1$, et [5], Th. 7.2, sinon). L'objectif de cette section est de prouver les deux résultats suivants :

Théorème 2.1 *Soit $l \in \mathbb{Z}$. Alors, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ est dense dans $\mathbf{V}_l^{1,p}$ lorsque p satisfait :*

$$(H) \qquad n/p \notin \{1, \dots, -l\} \quad \text{et} \quad n/p' \notin \{1, \dots, l\}.$$

Théorème 2.2 *Soient $l \in \mathbb{Z}$ et p satisfaisant la condition (H). Si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ vérifie :*

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}, \quad < \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} > = 0, \tag{2.1}$$

alors, il existe une distribution $g \in L_l^p(\mathbb{R}^n)$, telle que $\nabla g = \boldsymbol{f}$. De plus, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de n, p et l telle que

$$\| g \|_{L_l^p} \le C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} \quad si \;\; n/p + l > 0 \quad et \quad \| g \|_{L_l^p/\mathcal{P}_0} \le C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} \quad si \;\; n/p + l < 0.$$

Commentons ces deux énoncés avant de les démontrer. D'après les conventions adoptées, la condition (H) est vide si $l = 0$. Dans les autres cas, elle se réduit à :

$$n/p \notin \{1, \dots, -l\} \;\; \text{si } l < 0 \quad \text{et} \quad n/p' \notin \{1, \dots, l\} \;\; \text{si } l > 0,$$

(voir en annexe de ce chapitre pour des détails sur cette hypothèse). L'intérêt du Théorème 2.2 ne réside pas dans l'existence d'une primitive, ce problème étant résolu dans un cadre beaucoup plus général par le

Théorème 2.3 (de Rham) *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathcal{O})$ avec :*

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathcal{O}),\ \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{\varphi} = 0, \quad < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} >_{\boldsymbol{\mathcal{D}}' \times \boldsymbol{\mathcal{D}}} = 0.$$

Alors, il existe une fonction g sur $\mathcal{O}$ telle que $\boldsymbol{f} = \nabla g$.

Ce résultat est une application mise en évidence par J.L. Lions ([50], p. 67) d'un résultat profond de G. de Rham ([19], Th.17') traitant des courants sur les variétés (on trouvera une preuve constructive du Théorème 2.3 dans [59]). Signalons aussi les résultats de O.A. Ladyzhenskaya ([46], Th. 1, p. 28) dans le cas où $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, de L. Tartar [65], si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ et de C. Amrouche et V. Girault ([4], Prop. 2.10) pour $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$, avec $m \in \mathbb{Z}$ et Ω borné. Ces résultats précisent la régularité locale de la primitive. Mais dans $\mathbb{R}^n$, il est naturel de se demander si l'on contrôle de plus le comportement à l'infini d'une ou des primitives relativement à celui de $\boldsymbol{f}$. Dans [5], C. Amrouche, V. Girault et J. Giroire montrent en particulier (Prop. 4.3) que si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.3, alors elle admet au moins une primitive dans $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (voir aussi [31] pour une étude générale du cas $p = 2$). Le Théorème 2.2 fournit une propriété comparable lorsque $\boldsymbol{f}$ est moins régulière.

On note par ailleurs l'apparition de l'espace quotient $L^p_l(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_0$ dans l'estimation, conséquence nécessaire du fait que $L^p_l(\mathbb{R}^n)$ contient des fonctions polynomiales non nulles dès que $n/p + l < 0$. On retiendra plus généralement que, sous l'hypothèse (H), on a les inclusions optimales suivantes :

$$\mathcal{P}_{[1-l-n/p]} \subset W_l^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{P}_{[-l-n/p]} \subset L^p_l(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{P}_{[-1-l-n/p]} \subset W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n), \tag{2.2}$$

propriétés dont la vérification est directe (voir aussi [5], p. 594).

2.1 Preuve de la densité

Nous démontrons le Théorème 2.1 en distinguant les cas $l > 0$ et $l \leq 0$.

Proposition 2.4 *Soient $l > 0$ et p vérifiant (H). Alors, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ est dense dans $\mathbf{V}_l^{1,p}$.*

Preuve : Considérons une forme linéaire $\mathbf{T} \in (\mathbf{V}_l^{1,p})'$ telle que

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}, \quad < \mathbf{T}, \boldsymbol{\varphi} > \ = 0.$$

Le théorème de Hahn-Banach montre qu'elle se prolonge en une distribution $\widetilde{\mathbf{T}}$ appartenant à $\mathbf{W}_{-l}^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$. D'après le Théorème 2.3, il existe alors une distribution g telle que

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \nabla g.$$

En particulier, s'il existe une constante K telle $g + K$ appartienne à $L^{p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$, il vient grâce à la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W_l^{1,p}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbf{V}_l^{1,p}, \quad < \mathbf{T}, \boldsymbol{\chi} > = < \widetilde{\mathbf{T}}, \boldsymbol{\chi} > \ &= < \nabla g, \boldsymbol{\chi} >_{\mathbf{W}_{-l}^{-1,p'} \times \mathbf{W}_l^{1,p}} \\ &= - < g + K, \operatorname{div} \boldsymbol{\chi} >_{L^{p'}_{-l} \times L^p_l} = 0. \end{aligned}$$

Le résultat de la proposition sera donc établi, une fois démontré le

Lemme 2.5 *Soient $l > 0$ un entier et p satisfaisant (H). Pour toute distribution g telle que $\nabla g \in \mathbf{W}^{-1,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$, il existe une constante K telle que $g + K \in L^{p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$. De plus, K est unique si $n/p' - l > 0$ et est arbitraire si $n/p' - l < 0$.*

Pour démontrer ce lemme, nous introduisons des espaces avec poids d'ordre supérieur (voir [5], p. 593 pour une définition générale de $W^{m,p}_\alpha$, et p. 594, pour les propriétés de continuité des opérateurs de dérivation dans ces espaces) :

$$W^{2,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \{u \in W^{1,p}_{\alpha-1}(\mathbb{R}^n), \quad \nabla u \in \mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)\} \qquad \text{si } n/p + \alpha \neq 1, \quad (2.3)$$

$$W^{2,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \{u/ \ \frac{\rho^{\alpha-2}}{\ln \rho} u \in L^p(\mathbb{R}^n), \ \nabla u \in \mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)\} \quad \text{si } n/p + \alpha = 1. \quad (2.4)$$

Preuve du Lemme 2.5 : Soit une distribution g telle que $\nabla g \in \mathbf{W}^{-1,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$. Alors, $\Delta g = \operatorname{div}(\nabla g) \in W^{-2,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$ où $W^{-2,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace dual de $W^{2,p}_l(\mathbb{R}^n)$. Or, d'après le Théorème 9.9 de [5], pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $q \in]1, +\infty[$ vérifiant

$$n/q \notin \{1, \dots, -k\} \quad \text{et} \quad n/q' \notin \{1, \dots, k\},$$

les opérateurs de Laplace suivants sont des isomorphismes :

$$\Delta \ : \ W^{1,q}_k(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}^\Delta_{[1-k-n/q]} \longrightarrow W^{-1,q}_k(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}^\Delta_{[k+1-n/q']}, \quad (2.5)$$

$$\Delta \ : \ W^{2,q}_k(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}^\Delta_{[2-k-n/q]} \longrightarrow L^q_k(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}^\Delta_{[k-n/q']}. \quad (2.6)$$

En particulier, en prenant $q = p$ et $l = k$ dans (2.6), on obtient par dualité et transposition, les isomorphismes :

$$\Delta \ : \ L^{p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}^\Delta_{[l-n/p']} \ \rightarrow \ W^{-2,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}^\Delta_{[2-l-n/p]}. \quad (2.7)$$

i) le cas $l \geq 2$: Alors $2 - l - n/p < 0$ et d'après (2.7), il existe une fonction u dans $L^{p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$ telle que,

$$\Delta u = \Delta g. \quad (2.8)$$

La relation (2.8) implique que $(\nabla u - \nabla g)$ est harmonique et tempérée, puisqu'élément de $\mathbf{W}^{-1,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, il existe $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^\Delta_{[l-1-n/p']}$ tel que,

$$\nabla g = \nabla u + \boldsymbol{\lambda},$$

raisonnement qui ne s'applique pas directement à $u - g$ qui n'est pas nécessairement tempérée. D'autre part, cette égalité entraîne que $\boldsymbol{\lambda}$ est le gradient d'un polymôme $\mu \in \mathcal{P}_{[l-n/p']} \subset L^{p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$. Alors, la fonction $v = u + \mu$ appartient à $L^{p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$ et vérifie $\nabla g = \nabla v$, ce qui montre que g et v diffèrent d'une constante K. Enfin, l'unicité de K est une conséquence directe des inclusions (2.2).

ii) le cas $l = 1$: La démonstration est identique si $p < n$ car $2-l-n/p < 0$. En revanche, si $p \geq n$, alors $[2 - l - n/p] = 0$ et nous devons, pour montrer qu'une distribution u satisfaisant (2.8) existe, vérifier que :

$$< \Delta g, 1 >_{W_1^{-2,p'} \times W_{-1}^{2,p}} = 0.$$

Compte tenu de (2.2), c'est un cas particulier de l'égalité :

$$\forall \varphi \in W_{-1}^{2,p}(\mathbb{R}^n), \qquad < \Delta g, \varphi >_{W_1^{-2,p'} \times W_{-1}^{2,p}} = - < \nabla g, \nabla \varphi >_{\mathbf{W}_1^{-1,p'} \times \mathbf{W}_{-1}^{1,p}},$$

qui s'obtient aisément grâce à la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W_{-1}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. Le reste de la démonstration est alors identique au point (i). $\diamondsuit$

Remarque 2.6 L'énoncé du Lemme 2.5 est faux si $n/p' = l$. Par exemple, les fonctions $(\ln \rho)^\beta + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $0 < \beta < 1/p$ n'appartiennent alors pas à $L_{-l}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ alors que leurs gradients appartiennent à $\mathbf{L}_{-l+1}^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Or, $\mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}_{l-1}^p(\mathbb{R}^n)$ (par définition, car $n/p + l = n \neq 1$) avec injection continue et l'injection duale montre que le gradient appartient aussi à $\mathbf{W}_{-l}^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$.

Pour démontrer le Théorème 2.1 dans le cas $l \leq 0$, nous adoptons une méthode d'approximation directe qui utilise le fait qu'un champ de vecteur à divergence nulle s'écrit comme un rotationnel :

Définition 2.7 A tout champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$, régulier sur un ouvert Ω, on associe le champ de tenseurs antisymétriques : $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = (\partial_i v_j - \partial_j v_i)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Son opérateur adjoint formel associe à tout champ de tenseurs antisymétriques H le champ de vecteurs : $\operatorname{rot}^* H = (2 \sum_{i=1}^n \partial_i H_{ji})$, $j = 1, \ldots, n$. De plus, on a :

$$\operatorname{div} \operatorname{rot}^* = 0, \quad \operatorname{rot} \nabla = 0, \quad \frac{1}{2} \operatorname{rot}^* \operatorname{rot} = -\Delta I_n + \nabla \operatorname{div}. \tag{2.9}$$

Admettons momentanément le

Lemme 2.8 *Soit $l \leq 0$ un entier et p satisfaisant (H). Pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_l^{1,p}$, il existe un tenseur antisymétrique Φ à coefficients $W_l^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\operatorname{rot}^* \Phi = \boldsymbol{u}$.*

Nous pouvons alors aisément prouver la

Proposition 2.9 *Soient $l \leq 0$ et p vérifiant (H). Alors, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ est dense dans $\mathbf{V}_l^{1,p}$.*

Preuve : Soient $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_l^{1,p}$ et d'après le Lemme 2.8, $\Phi \in W_l^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ un tenseur antisymétrique tel que $\operatorname{rot}^* \Phi = \boldsymbol{v}$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_l^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, on peut approcher les fonctions Φ_{ij}, avec $i > j$ de Φ par une suite $\Phi_{ij}^n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. En posant $\Phi_{ji}^n = -\Phi_{ij}^n$ et

$\Phi^n_{ii} = 0$, la suite de tenseurs antisymétriques $\Phi^n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ approche Φ dans $W^{2,p}_l(\mathbb{R}^n)$. Par continuité de l'opérateur rot^* de $W^{2,p}_l(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbf{W}^{1,p}_l(\mathbb{R}^n)$, il vient

$$\operatorname{rot}^*\Phi^n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{rot}^*\Phi = \boldsymbol{v}, \quad \text{dans } \mathbf{W}^{1,p}_l(\mathbb{R}^n),$$

et $\operatorname{div}(\operatorname{rot}^*\Phi^n) = 0$ pour tout n. $\diamondsuit$

Pour établir le Lemme 2.8, nous avons besoin d'un résultat intermédiaire.

Lemme 2.10 *Soit $k \geq 0$ un entier. Pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k$, tel que* $\operatorname{div}\boldsymbol{\lambda} = 0$, *il existe tenseur antisymétrique Λ à coefficients $\mathcal{P}_{k+1}$ tel que* $\operatorname{rot}^*\Lambda = \boldsymbol{\lambda}$.

Preuve : On note $\mathcal{I}_j(f)$ la primitive $\int_0^{x_j} f\, dx_j$. Si $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k$ vérifie $\operatorname{div}\boldsymbol{\lambda} = 0$ et $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ alors le tenseur Λ dont les coefficients sont donnés par :

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2n}(\mathcal{I}_j\lambda_i - \mathcal{I}_i\lambda_j) \in \mathcal{P}_{k+1},$$

est antisymétrique et satisfait $\operatorname{rot}^*\Lambda = \boldsymbol{\lambda}$ (comme $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, on vérifie aisément que $\partial_i\mathcal{I}_j(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{I}_j(\partial_i\boldsymbol{\lambda})$). Si $\boldsymbol{\lambda}$ est constant, le problème est résolu par :

$$\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = 0, \quad \text{et} \quad 2\Lambda_{12} = -2\Lambda_{21} = \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_2, \quad \text{si} \quad n = 2,$$

$$\left.\begin{array}{rcll} 2\Lambda_{ij} = & \lambda_i x_j & \text{si} & j - i \equiv\ 1\,[n] \\ = & -\lambda_j x_i & \text{si} & j - i \equiv -1\,[n] \\ = & 0 & \text{sinon} & \end{array}\right\} \quad \text{si} \quad n \geq 3.$$

On obtient alors le résultat complet par linéarité. $\diamondsuit$

Démontrons alors le Lemme 2.8, terminant ainsi la preuve du Théorème 2.1.

Preuve du Lemme 2.8 : Par hypothèse, $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ est un tenseur antisymétrique à coefficients $L^p_l(\mathbb{R}^n)$. Compte tenu de l'hypothèse (H), et comme $l \leq 0$, l'isomorphisme (2.6) avec $q = p$ et $k = l$ montre qu'il existe un tenseur Ψ à coefficients $W^{2,p}_l(\mathbb{R}^n)$ tel que,

$$-2\Delta\Psi = \operatorname{rot}\boldsymbol{u}. \tag{2.10}$$

On résout en l'occurence n^2 problèmes de Laplaces indépendants, de sorte que l'on peut choisir, parmi les solutions de ce problème, un tenseur Ψ antisymétrique.
En appliquant l'opérateur rot^* à l'égalité (2.10), il vient,

$$-2\operatorname{rot}^*\Delta\Psi = \operatorname{rot}^*\operatorname{rot}\boldsymbol{u},$$

ce qui s'écrit encore d'après (2.9),

$$-\Delta(\operatorname{rot}^*\Psi - \boldsymbol{u}) = 0.$$

Autrement dit, $\boldsymbol{\lambda} = \operatorname{rot}^*\Psi - \boldsymbol{u}$, est harmonique dans $\mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, et appartient donc à $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\Delta}_{[-l+1-n/p]}$ (*cf.* (2.2)). Comme $\operatorname{div}\boldsymbol{\lambda} = 0$, il existe d'après le Lemme 2.10, un tenseur antisymétrique $\Lambda \in \mathcal{P}_{[2-l-n/p]}$ tel que $\boldsymbol{\lambda} = \operatorname{rot}^*\Lambda$. En particulier, $\psi + \Lambda$ appartient à $W_l^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ et vérifie

$$\operatorname{rot}^*(\Psi + \Lambda) = \boldsymbol{u}. \quad \diamondsuit$$

2.2 Primitives et espaces avec poids

Le Théorème 2.2 découle du résultat suivant :

Lemme 2.11 *Soient $l \in \mathbb{Z}$ et p satisfaisant la condition (H). Alors, pour toute distribution $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant :*

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{1,p'}_{-l}, \quad <\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}>_{\mathbf{W}_l^{-1,p}\times\mathbf{W}^{1,p'}_{-l}} = 0, \tag{2.11}$$

il existe une distribution $g \in L^p_l(\mathbb{R}^n)$, telle que $\nabla g = \boldsymbol{f}$ et une constante $C > 0$ ne dépendant que de n, p et l, telle que :

$$\| g \|_{L^p_l} \le C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} \quad si \ \ n/p + l > 0 \quad et \quad \| g \|_{L^p_l/\mathcal{P}_0} \le C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} \quad si \ \ n/p + l < 0.$$

En effet, si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ vérifie (2.1), alors d'après le Théorème 2.1, $\boldsymbol{f}$ vérifie aussi (2.11). De ce fait, le Lemme 2.11 fournit l'existence de la primitive dans $L^p_l(\mathbb{R}^n)$ ainsi que l'estimation souhaitée.

Preuve du Lemme 2.11 : Notons avant tout que si $g \in L^p_l(\mathbb{R}^n)$ alors ∇g vérifie (2.11), propriété qui découle de la densité de $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbf{W}^{1,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$ et de l'égalité :

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n), \quad <\nabla g, \varphi>_{\mathbf{W}_l^{-1,p}\times\mathbf{W}^{1,p'}_{-l}} = < g, \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}>_{L^p_l\times L^{p'}_{-l}}.$$

Ceci nous permet d'introduire les opérateurs

$$\nabla \ : \ L^p_l(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathbf{V}^{1,p'}_{-l}, \quad \text{si} \ \ n/p + l > 0, \tag{2.12}$$

$$\nabla \ : \ L^p_l(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_0 \longrightarrow \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathbf{V}^{1,p'}_{-l}, \quad \text{si} \ \ n/p + l < 0. \tag{2.13}$$

Nous démontrons que ce sont des isomorphismes, ce qui établit le lemme.

i) le cas $n/p + l < 0$: L'opérateur (2.13) est continu et clairement injectif sur l'espace quotient. Il suffit de montrer qu'il est aussi surjectif. Or, comme tout champ de vecteurs $\boldsymbol{f}$ dans $\mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathbf{V}^{1,p'}_{-l}$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.3, il existe une distribution g telle que $\nabla g = \boldsymbol{f}$. De plus, comme $l < -n/p < 0$, on obtient en changeant l en $-l$ et p en p' dans le Lemme 2.5 qu'il existe une constante K telle que $g + K \in L^p_l(\mathbb{R}^n)$. D'où la surjectivité de l'opérateur (2.13).

ii) le cas $n/p + l > 0$: Il suffit de montrer que l'opérateur adjoint :

$$\mathrm{div} \ : \ \mathbf{W}^{1,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)/\mathbf{V}^{1,p'}_{-l} \longrightarrow L^{p'}_{-l}(\mathbb{R}^n),$$

est un isomorphisme. Il est en effet clairement continu et injectif sur l'espace quotient. De plus, il est aussi surjectif puisqu'il admet comme inverse à droite, l'opérateur $\nabla(\Delta^{-1})$ où Δ désigne l'isomorphisme (2.6) avec $q = p'$ et $k = -l$. $\diamondsuit$

Remarque 2.12 D'après un résultat de I. Babuska et F. Brezzi (*cf.* [8, 13]), les isomorphismes (2.12) et (2.13) peuvent être reformulés sous forme de conditions "Inf-Sup", en l'occurence :

$$\inf_{\substack{\psi \in L^p_l \\ \psi \neq 0}} \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,p'}_{-l} \\ \boldsymbol{\varphi} \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\boldsymbol{x}) . \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}{\|\psi\|_{L^p_l} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{W}^{1,p'}_{-l}}} \geq C \quad \text{si} \quad n/p + l > 0, \tag{2.14}$$

$$\inf_{\substack{\psi \in L^p_l/\mathcal{P}_0 \\ \psi \neq 0}} \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,p'}_{-l} \\ \boldsymbol{\varphi} \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\boldsymbol{x}) . \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}{\|\psi\|_{L^p_l/\mathcal{P}_0} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{W}^{1,p'}_{-l}}} \geq C \quad \text{si} \quad n/p + l < 0. \tag{2.15}$$

3 Existence et unicité pour le problème de Stokes

Nous démontrons dans cette section le Théorème 1.2 et travaillons donc toujours sous l'hypothèse (H) (voir annexe pour les cas critiques). Nous étudions en premier lieu l'unicité des éventuelles solutions dans un espace avec poids donné.

3.1 Unicité des solutions

Nous introduisons l'espace défini par V. Girault dans [31] pour tout entier k :

$$N_k = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k \times \mathcal{P}^{\Delta}_{k-1};\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{\lambda} = 0, -\nu\Delta\boldsymbol{\lambda} + \nabla\mu = \mathbf{0}\},$$

qui, d'après les conventions adoptées pour les espaces $\mathcal{P}_k$, est réduit à $\{(\mathbf{0}, 0)\}$ lorsque $k < 0$ et $N_0 = \boldsymbol{\mathcal{P}}_0 \times \{0\}$. Nous démontrons dans la proposition qui suit les propriétés d'unicité annoncées dans le Théorème 1.2.

Proposition 3.1 *Soient $l \in \mathbb{Z}$ et p satisfaisant (H). Toute solution du problème (S) dans $\mathbf{W}^{1,p}_l(\mathbb{R}^n) \times L^p_l(\mathbb{R}^n)$ est unique dans cet espace à un élément de $N_{[1-l-n/p]}$ près.*

Preuve : Par linéarité, le résultat revient à caractériser l'ensemble $\mathcal{N}^p_l(\mathbb{R}^n)$ des solutions $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}_l(\mathbb{R}^n) \times L^p_l(\mathbb{R}^n)$ du problème (S) avec des données nulles. Considérons une telle solution : en prenant la divergence de la première équation du problème (S), on montre que π est harmonique sur $\mathbb{R}^n$. Comme c'est une distribution tempérée, π est un polynôme harmonique qui, d'après les inclusions (2.2), appartient donc à $\mathcal{P}^{\Delta}_{[-l-n/p]}$. Mais, on déduit alors de la première équation du problème (S) que $\boldsymbol{u}$ est biharmonique et donc polynomial. Ainsi, d'après (2.2), $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{[1-l-n/p]}$ et $\mathcal{N}^p_l(\mathbb{R}^n) \subset N_{[1-l-n/p]}$. L'inclusion réciproque est évidente. $\diamondsuit$

Remarque 3.2 Le raisonnement précédent a d'autres applications. Par exemple, deux solutions tempérées du même problème (S), diffèrent nécessairement d'un couple de polynômes appartenant à $\cup_{k\geq 0} N_k$. Ainsi, lorsque le problème (S) a une solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ avec

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \overset{|\boldsymbol{x}|\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0},$$

toute autre solution $(\boldsymbol{v}, \eta)$ telle que $\boldsymbol{v}$ s'annule à l'infini vérifie $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ et $\eta = \pi + c$, $c \in \mathcal{P}_0$.

3.2 Existence dans les espaces avec poids

Nous commençons par établir l'existence de solutions lorsque $l = 0$. Puis, nous généralisons la méthode au cas $l < 0$ et obtenons le cas $l > 0$ par dualité.

Proposition 3.3 *Soit $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}^{-1,p}_0(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ vérifiant, si $p \leq n'$, la condition de compatibilité*

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_0, \quad <\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\lambda}>_{\mathbf{W}^{-1,p}_0 \times \mathbf{W}^{1,p'}_0} = 0. \tag{3.1}$$

Alors, le problème (S) a une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}_0(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de ν, p et n telle que :

$$\inf_{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{[1-n/p]}} \| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_0} + \| \pi \|_{L^p} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_0} + \| g \|_{L^p}).$$

Preuve :

i) La condition (3.1) *est nécessaire :* Considérons $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}_0(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ alors $-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi \in \mathbf{W}^{-1,p}_0(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{div}\boldsymbol{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (voir [5], p.594). De plus, par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{1,p'}_0(\mathbb{R}^n)$, on vérifie que pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,p'}_0(\mathbb{R}^n)$:

$$< -\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi, \boldsymbol{\varphi} >_{\mathbf{W}^{-1,p}_0 \times \mathbf{W}^{1,p'}_0} = -\nu < \boldsymbol{u}, \Delta\boldsymbol{\varphi} >_{\mathbf{W}^{1,p}_0 \times \mathbf{W}^{-1,p'}_0} - < \pi, \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} >_{L^p \times L^{p'}}.$$

Si $p \leq n'$, cette égalité à lieu pour $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_0$ ($cf.$ (2.2)), d'où (3.1).

ii) Existence et estimation : Observons tout d'abord que la solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ recherchée doit satisfaire le problème découplé :

$$(S') \qquad \begin{aligned} \Delta\pi &= \operatorname{div}\boldsymbol{f} + \nu\Delta g, \\ \nu\Delta\boldsymbol{u} &= \nabla\pi - \boldsymbol{f}, \end{aligned}$$

obtenu en considérant la divergence de la première équation du problème (S). Soit alors $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ vérifiant (3.1) si $p \leq n'$, on a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^n),$$

et pour tout $\varphi \in W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^n)$:

$$< \operatorname{div} \boldsymbol{f}, \varphi >_{W_0^{-2,p} \times W_0^{2,p'}} = - < \boldsymbol{f}, \nabla \varphi >_{\mathbf{W}_0^{-1,p} \times \mathbf{W}_0^{1,p'}} .$$

Cette égalité, obtenue grâce à la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^n)$, a en particulier lieu pour tout polynôme de $\mathcal{P}_{[2-n/p']}$, espace contenu dans $W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^n)$. On en déduit avec (3.1) que $\operatorname{div} \boldsymbol{f} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[2-n/p']}$, ce qui est aussi vrai de Δg d'après (2.7) où l'on a posé $l = 0$ et changé p en p'. Cet isomorphisme fournit de plus l'existence d'une fonction $\pi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\Delta \pi = \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \nu \Delta g$ et l'estimation :

$$\| \pi \|_{L^p} \leq C \| \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \nu \Delta g \|_{W_0^{-2,p}} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}} + \| g \|_{L^p}).$$

Remarquons maintenant que $\nabla \pi$ appartient à $\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[1-n/p']}$. Ainsi, grâce à l'isomorphisme (2.5) avec $q = p$ et $k = 0$, obtient-on l'existence de $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\nu \Delta \boldsymbol{u} = \nabla \pi - \boldsymbol{f} \tag{3.2}$$

et

$$\inf_{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{[1-n/p]}} \| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\mathbf{W}_0^{1,p}} \leq C \| \nabla \pi - \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}} + \| g \|_{L^p}).$$

Appliquons finalement l'opérateur divergence à l'égalité (3.2). Il vient :

$$\nu \Delta (\operatorname{div} \boldsymbol{u}) = \Delta \pi - \operatorname{div} \boldsymbol{f} = \nu \Delta g. \tag{3.3}$$

Alors, $\operatorname{div} \boldsymbol{u} - g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ est harmonique, c'est-à-dire que $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = g$. $\diamondsuit$

Remarque 3.4 Si $\Delta g + \operatorname{div} \boldsymbol{f} = 0$, alors la pression $\pi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ est harmonique et donc identiquement nulle. Ceci n'est pas toujours le cas pour d'autres régularités des données (voir le cas $l < 0$ ci-dessous). Par ailleurs, cette situation est totalement différente de celle qui prévaut dans les domaines bornés.

La démonstration du cas $l < 0$ est aussi basée sur la résolution du problème (S'). Nous insistons donc surtout sur les points spécifiques à ce résultat.

Proposition 3.5 *Soit $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$ avec $l < 0$ un entier et p satisfaisant (H). Le problème (S) a une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie :*

$$\inf_{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in N_{[1-l-n/p]}} (\| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\mathbf{W}_l^{1,p}} + \| \pi + \mu \|_{L_l^p}) \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} + \| g \|_{L_l^p}),$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de ν, p, l et n.

Preuve :

i) Existence d'une solution : Soit $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$. Comme dans la Proposition 3.3, on vérifie en premier lieu que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}, \Delta g \in W_l^{-2,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}^{\Delta}_{[l+2-n/p']}.$$

L'isomorphisme (2.7) entraîne à nouveau l'existence d'une fonction $\pi \in L_l^p(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\Delta\pi = \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \nu\Delta g.$$

De même, l'isomorphisme (2.5) avec $q = p$ et $k = l$, fournit l'existence de $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ solution de (3.2). Alors, $\operatorname{div} \boldsymbol{u} - g$ est harmonique et appartient à $L_l^p(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, d'après (2.2), il vient $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = g + \mu$ où $\mu \in \mathcal{P}^{\Delta}_{[-l-n/p]}$. Considérons un instant comme acquis le :

Lemme 3.6 *Pour tout entier $k \geq 0$,* $\mathcal{P}^{\Delta}_k = \operatorname{div}(\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\Delta}_{k+1})$.

Alors, $\mu = \operatorname{div} \boldsymbol{\lambda}$ avec $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\Delta}_{[1-l-n/p]} \subset \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et il est immédiat de vérifier que le couple $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}, \pi)$ résout le problème (S) dans $\mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$.

ii) Estimations : Introduisons l'opérateur :

$$T \; : \quad (\mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n))/N_{[1-l-n/p]} \longrightarrow \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n) \tag{3.4}$$

$$(\boldsymbol{u}, \pi) \longrightarrow (-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi, -\operatorname{div} \boldsymbol{u}) \tag{3.5}$$

Il est clair que cet opérateur est continu mais aussi injectif d'après la Proposition 3.1. D'autre part, le point (i) montre que T est surjectif. C'est donc un isomorphisme et on en déduit immédiatement l'estimation souhaitée.

iii) Preuve du Lemme 3.6 : Si $k = 0$, le résultat est évident. Si $k = 1$, on peut associer à x_i le polynôme

$$\boldsymbol{\lambda}_i = (\lambda_{ij}) = (\frac{\delta_{ij}}{2}(x_j^2 - x_{j+1}^2))$$

-les indices sont ici compris modulo n-. Il est clair que $\operatorname{div} \boldsymbol{\lambda}_i = x_i$ et $\Delta\boldsymbol{\lambda}_i = 0$. D'où le résultat par linéarité. Supposons maintenant que $k \geq 2$ et soit $\mu \in \mathcal{P}^{\Delta}_k$. Alors μ se décompose en sa partie de degré 1, notée μ_1 et un polynôme μ_2 tel que $\nabla\mu_2(0) = \mathbf{0}$ et $\mu_2(0) = 0$. Ces deux polynômes étant harmoniques, il suffit de prouver le résultat pour μ_2. En utilisant les notations du Lemme 2.11, on vérifie sans difficulté que

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{n}(\mathcal{I}_j(\mu_2)),$$

est une solution du problème. $\diamondsuit$

Il reste à traiter le cas $l > 0$, qui découle par dualité de la Proposition 3.5.

Corollaire 3.7 *Soient un entier $l > 0$ et p satisfaisant (H). Etant donné un couple $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant la condition de compatibilité*

$$\forall (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in N_{[l+1-n/p']}, \quad < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\lambda} >_{\mathbf{W}_l^{-1,p} \times \mathbf{W}_{-l}^{1,p'}} + < g, \mu >_{L_l^p \times L_{-l}^{p'}} = 0,$$

le problème (S) a une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de ν, p, n et l telle que :

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}_l^{1,p}} + \| \pi \|_{L_l^p} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} + \| g \|_{L_l^p}).$$

Preuve : On considère l'opérateur (3.4) où l'on change respectivement p en p' et l en $-l$ (N.B. ce changement ne modifie pas l'énoncé de l'hypothèse (H)). En vertu du point (ii) de la démonstration précédente, cet opérateur est un isomorphisme. Il en va donc de même pour son adjoint :

$$T^* \ : \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow (\mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)) \perp N_{[l+1-n/p']}.$$

Mais un simple argument de densité montre que

$$T^*(\boldsymbol{\chi}, \xi) \ = \ (-\nu \Delta \boldsymbol{\chi} + \nabla \xi, -\operatorname{div} \boldsymbol{\chi}),$$

de sorte que le résultat est démontré. $\diamondsuit$

Ce corollaire conclut donc la démonstration du Théorème 1.2.

3.3 Comportement asymptotique des solutions

Nous étudions ici le comportement asymptotique des fonctions de $W_\alpha^{1,p}$. Nous établissons selon la valeur du paramètre p, un contrôle en moyenne sphérique ou ponctuel de ces fonctions à l'infini qui généralisent en un sens la propriété élémentaire suivante :

$$\sup\{\gamma \in \mathbb{R}, \ \rho^\gamma(\boldsymbol{x}) \in W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)\} = 1 - n/p - \alpha.$$

Précisons, avant tout, ce que nous entendons par comportement à l'infini en moyenne sphérique d'une fonction de $W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Soit Σ_r la sphère centrée en 0 de rayon $r > 0$, c'est le bord (régulier) de l'ouvert $\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, | \boldsymbol{x} | > r \}$. En particulier, toute fonction $u \in W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (donc localement $W^{1,p}$) admet une trace L^p sur Σ_r avec :

$$(\int_{\Sigma_r} |u(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{1/p} \leq C \| u \|_{W_\alpha^{1,p}(\{|\boldsymbol{x}|>r\})}, \tag{3.6}$$

où la constante $C > 0$ ne dépend que de r, n, p et α.

Cette inégalité nous permet d'introduire la moyenne au sens L^p de la fonction u sur Σ_r comme la quantité :

$$\| u(r,.) \|_{L^p(\Sigma)} := r^{(1-n)/p} (\int_{\Sigma_r} |u(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{1/p} = (\int_{\Sigma} |u(r,\omega)|^p d\omega)^{1/p}, \qquad (3.7)$$

où (r,ω) sont les coordonnées sphériques du point $\boldsymbol{x}$ et $\Sigma = \Sigma_1$. Le comportement de cette quantité lorsque r tend vers l'infini est l'objet de la

Proposition 3.8 *Soit α un réel, il existe une constante $C = C(n,p,\alpha) > 0$ telle que pour toute fonction $u \in W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$,*

$$\| u(r,.) \|_{L^p(\Sigma)} \leq C \| u \|_{W^{1,p}_\alpha(\{|\boldsymbol{x}|>r\})} r^{1-n/p-\alpha}, \quad si \ \ r > 2 \ \ et \ \ n/p + \alpha \neq 1 \qquad (3.8)$$

$$\| u(r,.) \|_{L^p(\Sigma)} \leq C \| u \|_{W^{1,p}_\alpha(\{|\boldsymbol{x}|>r\})} \ln r, \quad si \ \ r > 2 \ \ et \ \ n/p + \alpha = 1. \qquad (3.9)$$

Preuve : On considère tout d'abord le cas $\alpha = 0$. En combinant l'inégalité (3.6) et la définition (3.7), il vient

$$\| u(r,.) \|_{L^p(\Sigma)} \leq C(r,p,n) \| u \|_{W^{1,p}_0(\{|\boldsymbol{x}|>r\})}, \qquad (3.10)$$

où la constante $C(r,p,n)$ optimale est donnée par :

$$C(r,p,n) = \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \frac{\| \varphi(r,.) \|_{L^p(\Sigma)}}{\| \varphi \|_{W^{1,p}_0(\{|\boldsymbol{x}|>r\})}}.$$

Effectuons le changement de variables $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/r$ dans les intégrales permettant de définir $C(r,p,n)$. En majorant le résultat grâce aux inégalités élementaires :

$$\rho(r\boldsymbol{y}) \leq r\rho(\boldsymbol{y}) \quad \text{et} \quad \ln \rho(r\boldsymbol{y}) \leq 2 \ln r \ln \rho(\boldsymbol{y}), \quad \text{si } r > 2, \qquad (3.11)$$

on obtient du fait de l'invariance de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par dilatation :

$$C(r,p) \leq C(1,p) r^{1-n/p} \text{ si } p \neq n \text{ et } C(r,n) \leq 2C(1,n) \ln r,$$

soit, compte tenu de (3.10), le résultat attendu.

Lorsque α est non-nul, on conclut grâce aux arguments suivants :

i) Si $p \neq n$ et $n/p + \alpha \neq 1$, alors $u \in W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \rho^\alpha u \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n)$.

ii) Si $p \neq n$ et $n/p + \alpha = 1$, alors $u \in W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \rho^\alpha (\lg \rho)^{-1} u \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n)$.

iii) Si $p = n$ et $n/p + \alpha \neq 1$ alors, $u \in W^{1,n}_\alpha(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \rho^\alpha u \in W^{1,n}_0(\mathbb{R}^n) \cap L^n_{-1}(\mathbb{R}^n)$ et le poids logarithmique n'apparait plus dans $W^{1,n}_0(\mathbb{R}^n) \cap L^n_{-1}(\mathbb{R}^n)$. On conclut en appliquant la méthode précédente à cet espace.

Les preuves en sont directes et montrent que ces trois opérations sont de plus continues. On en déduit donc la totalité du résultat. $\diamondsuit$

Cette description peut être sensiblement améliorée si $p > n$, comme le montre la

Proposition 3.9 *Soient $p > n$ et $u \in W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Il existe une constante $C > 0$ indépendante de u telle que*

$$\| \rho^{n/p+\alpha-1} u \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \| u \|_{W_\alpha^{1,p}} \quad et \quad u(\boldsymbol{x}) = o(r^{1-n/p-\alpha}), \; si \; n/p + \alpha \neq 1,$$

$$\| \frac{u}{\ln \rho} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \| u \|_{W_\alpha^{1,p}} \quad et \quad u(\boldsymbol{x}) = o(\ln r), \; si \; n/p + \alpha = 1.$$

Preuve : On traite seulement le cas $\alpha = 0$, les autres en découlant grâce aux arguments explicités dans la preuve de la Proposition 3.8. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule unité B de $\mathbb{R}^n$ et égale à 1 sur la boule de rayon $1/2$ centrée en 0 et posons $u_1 = u\varphi$ et $u_2 = u(1-\varphi)$. Comme $p > n$, les injections de Sobolev (voir [1]) donnent les inégalités :

$$\| u_1 \|_{L^\infty(B)} \leq C_1 \|\nabla u_1\|_{\mathbf{L}^p(B)},$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad |u_2(\boldsymbol{x}) - u_2(\mathbf{0})| \leq C_2 \|\nabla u_2\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)} |\boldsymbol{x}|^{1-n/p}.$$

La fonction φ et ses dérivées étant bornées, il vient facilement :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad |u(\boldsymbol{x})| \leq C(\rho(\boldsymbol{x}))^{1-n/p} \|u\|_{W_0^{1,p}}. \tag{3.12}$$

Finalement, si $u_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ approche u dans $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, il résulte de (3.12) que

$$\| \rho^{n/p-1}(u - u_m) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \| u - u_m \|_{W_0^{1,p}}.$$

Par conséquent, $\rho^{n/p-1}u$ est limite uniforme de fonctions à support compact et tend donc vers 0 à l'infini. $\diamondsuit$

Ces deux résultats étendent des propriétés comparables établies par C.G. Galdi dans [26] (Chap. II, Lemme 5.1, p. 60, et Théorème 7.2, p. 76). Nous en déduisons immédiatement le

Corollaire 3.10 *Soit $l \in \mathbb{Z}$ et $p > n$ satisfaisant (H), toute solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ appartenant à $\mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$ fournie par le Théorème 1.2 vérifie :*

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = o(r^{1-n/p-l}) \; si \; n/p + l \neq 1, \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = o(\ln r) \quad sinon.$$

4 Solutions explicites du problème (S)

Nous abordons maintenant la résolution du problème (S) sous un angle différent. Nous construisons des solutions par convolution avec la solution élémentaire. Cette approche est complémentaire de l'approche abstraite développée dans la section précédente. Elle permet en particulier de mieux comprendre le rôle des conditions de compatibilité dans le Théorème 1.2.

4.1 Le cadre classique

Rappelons que la solution élémentaire de l'opérateur $-\Delta$ est

$$F(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} c_1(n)|\boldsymbol{x}|^{2-n} & \text{si } n \geq 3, \\ \dfrac{1}{4\pi}\ln|\boldsymbol{x}| & \text{si } n = 2. \end{cases} \tag{4.1}$$

De même, en posant $c_2(n) = (n-2)c_1(n)$ si $n \geq 3$ et $c_2(2) = 1/4\pi$, on introduit la solution élémentaire du problème de Stokes, soit le tenseur U et le vecteur $\mathbf{Q}$ donnés par :

$$U_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{\delta_{ij}}{\nu}F(\boldsymbol{x}) + c_2(n)\frac{x_i x_j}{\nu|\boldsymbol{x}|^n}, \quad Q_i(\boldsymbol{x}) = 2c_2(n)\frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|^n},\ i,j = 1,\dots,n,$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Il est en particulier standard d'établir les égalités dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$-\nu\Delta U + \nabla\mathbf{Q} = \delta I_n, \qquad \operatorname{div} U = \mathbf{0},$$

où δ est la mesure de Dirac.

Remarque 4.1 On peut retrouver les expressions de U et $\mathbf{Q}$ par des calculs élémentaires en transformée de Fourier.

Lorsque $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, le couple $(\boldsymbol{u},\pi)$ défini par

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} U_{ik} * f_k + F * \partial_i g,\ i = 1,\dots,n \quad \text{et} \quad \pi = \sum_{k=1}^{n} Q_k * (f_k - \nu\partial_k g),$$

est une solution indéfiniment différentiable du problème (S) (on remarquera pour prouver cette propriété que $\sum_{k=1}^n U_{ik} * \partial_k g = (\sum_{k=1}^n \partial_k U_{ik}) * g = 0$). Dans toute la suite, on utilisera la notation plus condensée :

$$\boldsymbol{u} = U * \boldsymbol{f} + F * \nabla g \quad \text{et} \quad \pi = \mathbf{Q} * (\boldsymbol{f} - \nu\nabla g). \tag{4.2}$$

Il est possible de décrire très précisément le comportement à l'infini de la solution donnée par (4.2). Pour ce faire, nous introduisons pour toute fonction $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, les moments :

$$\forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}^n, \quad m_{\boldsymbol{\beta}}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\boldsymbol{y})\frac{y_1^{\beta_1}\cdots y_n^{\beta_n}}{\beta_1!\cdots\beta_n!}d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} h(\boldsymbol{y})\frac{\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\beta}}}{\boldsymbol{\beta}!}d\boldsymbol{y}.$$

Nous démontrons alors la

Proposition 4.2 *Soient $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ayant leur support dans le compact K. Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, tel que $|\,\boldsymbol{x}\,| > 2\sup_{\boldsymbol{z}\in K}|\boldsymbol{z}|$, et pour tout entier $m \geq 0$, le couple $(\boldsymbol{u},\pi)$ donné par (4.2) vérifie :*

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leq m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\partial^{\boldsymbol{\beta}} U(\boldsymbol{x}) m_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{f}) + \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leq m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\partial^{\boldsymbol{\beta}} F(\boldsymbol{x}) m_{\boldsymbol{\beta}}(\nabla g) + \boldsymbol{w}_m(\boldsymbol{x}),$$

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leq m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\partial^{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{Q}(\boldsymbol{x}).m_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{f} - \nu\nabla g) + \tau_m(\boldsymbol{x}),$$

avec, pour tout entier $k \geq 0$:

$$|\nabla^k \boldsymbol{w}_m(\boldsymbol{x})| + |\boldsymbol{x}||\nabla^k \eta_m(\boldsymbol{x})| \leq C_{m,k}(\|\boldsymbol{f}\|_{L^1} + \|g\|_{L^1})|\boldsymbol{x}|^{1-n-m-k}.$$

Preuve : Nous effectuons, pour clarifier les idées, une version scalaire de la démonstration. On considère $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\})$ une fonction homogène de degré $d > -n$ ou $H(\boldsymbol{x}) = \ln|\boldsymbol{x}|$ et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors,

$$(H * f)(\boldsymbol{x}) = \int_K H(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}. \tag{4.3}$$

Si $|\boldsymbol{x}| > 2\sup_{\boldsymbol{z}\in K}|\boldsymbol{z}|$, alors pour tout $\boldsymbol{y} \in K$ et $t \in [0,1]$,

$$|\, \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y}\,| > |\,\boldsymbol{x}\,|/2 > \sup_{\boldsymbol{z}\in K}|\boldsymbol{z}|. \tag{4.4}$$

On peut donc appliquer le Théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre m à la fonction $t \mapsto H(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y})$ entre 0 et 1. Il vient, compte tenu de (4.4) :

$$|\, H(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leq m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\frac{\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\beta}}}{\boldsymbol{\beta}!}\partial^{\boldsymbol{\beta}} H(\boldsymbol{x})\,| \leq \sup_{t\in[0,1]} |\,\nabla^{m+1} H(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y})\,| \leq C_m|\,\boldsymbol{x}\,|^{d-m-1},$$

avec

$$C_m = 2^{m+1}\sup_{\boldsymbol{z}\in\Sigma}|\,\nabla^{m+1} H(\boldsymbol{z})\,|.$$

Cette inégalité est de plus uniforme par rapport à $\boldsymbol{y} \in K$. Ainsi, en intégrant le membre de gauche multiplié par $f(\boldsymbol{y})$, on obtient directement :

$$|\,(H * f)(\boldsymbol{x}) - \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leq m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|} m_{\boldsymbol{\beta}}(f)\partial^{\boldsymbol{\beta}} H(\boldsymbol{x})\,| \leq C_m\|\,f\,\|_{L^1}|\,\boldsymbol{x}\,|^{d-m-1},$$

soit le résultat attendu lorsque $k = 0$. Lorsque $k > 0$, le même raisonnement s'applique à $\nabla^k(H * f) = (\nabla^k H) * f$. En effet, même si $\nabla^k H$ peut ne plus être intégrable au voisinage de l'origine, l'égalité (4.3) a toujours lieu pour $\boldsymbol{x}$ tel que $|\boldsymbol{x}| > 2\sup_{\boldsymbol{z}\in K}|\boldsymbol{z}|$ grâce à (4.4) $\diamondsuit$

4.2 Extension à des données non régulières

Nous introduisons maintenant une notion de convolution généralisée qui permettra, à terme, d'expliciter certaines des solutions obtenues au Théorème 1.2.

Convolution généralisée : Soient $f \in W_\alpha^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ et H une fonction localement intégrable, nous posons formellement :

$$< H * f, \varphi >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = < f, \check{H} * \varphi >_{W_\alpha^{-1,p} \times W_{-\alpha}^{1,p'}}, \tag{4.5}$$

avec $\check{H}(\boldsymbol{x}) = H(-\boldsymbol{x})$ et nous démontrons le

Lemme 4.3 *L'expression* (4.5) *définit une distribution pour tout* $f \in W_\alpha^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ *dans les cas suivants :*
i) si et seulement si $n/p + \alpha > 1$, *lorsque* $H = U_{ij}$ *ou* $H = F$.
ii) si et seulement si $n/p + \alpha > 0$, *lorsque* $H = Q_i$.

Preuve : Nous démontrons seulement le point (i) avec $H = U_{ij}$, le reste étant similaire. L'expression (4.5) a un sens si et seulement si pour tout compact K et pour toute suite $\varphi_m \to 0$ dans $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, la suite $\check{U}_{ij} * \varphi_m$ tend vers 0 dans $W_{-\alpha}^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$. Observant que $\check{U}_{ij} = U_{ij}$, il est standard de vérifier que $U_{ij} * \varphi_m$ et son gradient convergent localement uniformément vers 0. D'autre part, à l'infini, la Proposition 4.2 entraîne :

$$U_{ij} * \varphi_m \overset{\infty}{\approx} (\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}) U_{ij}, \quad \nabla(U_{ij} * \varphi_m) \overset{\infty}{\approx} (\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}) \nabla U_{ij}. \tag{4.6}$$

Si $n/p + \alpha > 1$, la convergence locale et (4.6) suffisent à montrer que

$$U_{ij} * \varphi_m \to 0 \quad \text{dans } W_{-\alpha}^{1,p'}(\mathbb{R}^n).$$

Réciproquement, si $n/p + \alpha \leq 1$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m \neq 0$, alors (4.6) montre que $U_{ij} * \varphi_m$ n'appartient pas à $W_\alpha^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$ et dans (4.5), le membre de droite n'a donc pas de sens. $\diamondsuit$

Il est alors clair que la formule (4.2) définit, pour $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}_{-\alpha}^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_\alpha^p(\mathbb{R}^n)$ avec $n/p + \alpha > 1$, une solution au sens des distributions du problème (S). Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 4.4 *Soient* $l \in \mathbb{Z}$ *et* p *satisfaisant* (H). *Si* $n/p + l > 1$, *et* $(\boldsymbol{f}, g)$ *appartient à* $(\mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)) \perp N_{[l+1-n/p']}$, *alors l'unique solution* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$ *du problème* (S) *est donnée par la formule* (4.2).

L'argument clef dans la démonstration de ce résultat est donné par le lemme suivant qui fait appel à la théorie des intégrales singulières.

Lemme 4.5 *Soit* β *un réel et* $q \in]1, +\infty[$ *tels que* $0 < n/q + \beta < n$. *Il existe une constante* $C = C(\beta, n, q) > 0$, *telle que pour toute fonction* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\| \nabla^2 (U_{ij} * \psi) \|_{\mathbf{L}_\beta^q} \leq C \| \psi \|_{\mathbf{L}_\beta^q}. \tag{4.7}$$

Preuve : Comme $0 < n/q + \beta < n$, on vérifie facilement avec la Proposition 4.2 que $U_{ij} * \psi$ appartient à $W^{2,q}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ (voir (2.3) ou (2.4) pour la définition de cet espace). On utilise alors le résultat de J. Garcia-Cuerva et J.L. Rubio de Francia dans [29] qui établit que, pour $j = 1, \dots, n$, les tranformées de Riesz :

$$R_j \ : \quad L^q_{\beta}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q_{\beta}(\mathbb{R}^n), \tag{4.8}$$

$$\varphi \mapsto c_n \text{v.p.}\left(\frac{x_j}{|\boldsymbol{x}|^{n+1}} * \varphi\right), \tag{4.9}$$

sont continues si et seulement si $0 < n/q + \beta < n$. De plus,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad R_j R_k(\Delta\varphi) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}, \tag{4.10}$$

et par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{2,q}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ ([5], th. 7.2, p.595) il vient donc

$$\| \nabla^2 (U_{ij} * \psi) \|_{L^q_{\beta}} \leq C \| \Delta(U_{ij} * \psi) \|_{L^q_{\beta}}. \tag{4.11}$$

Or, on vérifie de manière standard qu'au sens des distributions,

$$\nu \Delta(U_{ij} * \psi) = -(1 + c_3(n))\delta_{ij}\psi - 2c_2(n) \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|>\varepsilon} k_{ij}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right),$$

où $k_{ij}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{x}|^n} - n\dfrac{x_i x_j}{|\boldsymbol{x}|^{n+2}}$ est une fonction C^∞ homogène de degré $-n$ et d'intégrale nulle sur la sphère unité Σ. D'après [18](Ch. IV, pp. 85-86), ceci montre que l'opérateur :

$$K_{ij} \ : \ \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|>\varepsilon} k_{ij}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right), \tag{4.12}$$

est un opérateur de Calderón-Zygmund. Comme le poids $\rho^{\beta q}$ appartient à la classe A_q de Muckenhoupt si et seulement si $0 < n/q + \beta < n$, l'opérateur (4.12) est défini et continu de $L^q_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même (*cf.* [54] Chap. VII,Cor. 2, p. 255, et [67] Chap. IX). En particulier si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on en déduit directement que :

$$\| \Delta(U_{ij} * \psi) \|_{L^q_{\beta}} \leq C(\| \psi \|_{L^q_{\beta}} + \| K_{ij}\psi \|_{L^q_{\beta}}) \leq C \| \psi \|_{L^q_{\beta}},$$

ce qui, avec (4.11), établit le résultat. $\diamondsuit$

Grâce à cette propriété, nous obtenons la continuité des opérateurs de convolution par F, U et $\mathbf{Q}$.

Proposition 4.6 *Soient α un réel et p tels que $1 < n/p + \alpha < n$.*
i) La convolution par U_{ij} ou par F est continue de $W^{-1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[\alpha+1-n/p']}$ vers $W^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.
ii) La convolution par Q_i est continue de $W^{-1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[\alpha+1-n/p']}$ vers $L^p_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve : On démontre seulement la continuité de la convolution par U_{ij} qui est la propriété qui demande le plus d'attention. Les autres s'obtiennent suivant un schéma similaire mais avec certaines simplifications notables. Soit $f \in W_\alpha^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[\alpha+1-n/p']}$, c'est à dire, satisfaisant

$$< f, 1 >_{W_\alpha^{-1,p} \times W_{-\alpha}^{1,p'}} = 0, \quad \text{si} \quad n-1 \leq n/p + \alpha < n.$$

Il existe $\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{L}_\alpha^p(\mathbb{R}^n)$ et une constante $C > 0$, indépendante de f, telle que :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\chi} = f \quad \text{et} \quad \| \boldsymbol{\chi} \|_{\mathbf{L}_\alpha^p} \leq C \|f\|_{W_\alpha^{-1,p}},$$

propriété qui découle du Théorème 1.2 (suivre *mutatis mutandis* la proposition 4.1 dans [5], p. 585). En revenant à la définition (4.5), on a pour tout $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} | < \nabla(U_{ij} * f), \boldsymbol{\theta} >_{\boldsymbol{\mathcal{D}}' \times \boldsymbol{\mathcal{D}}} | &= \ | < \operatorname{div} \boldsymbol{\chi}, U_{ij} * \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} >_{W_\alpha^{-1,p} \times W_{-\alpha}^{1,p'}} |, & (4.13) \\ &\leq \ | < \boldsymbol{\chi}, \nabla \operatorname{div}(U_{ij} * \boldsymbol{\theta}) >_{\mathbf{L}_\alpha^p \times \mathbf{L}_{-\alpha}^{p'}} |, & (4.14) \\ &\leq \ \| \boldsymbol{\chi} \|_{\mathbf{L}_\alpha^p} \| \nabla^2 (U_{ij} * \boldsymbol{\theta}) \|_{L_{-\alpha}^{p'}}. & (4.15) \end{aligned}$$

De même, il vient :

$$| < U_{ij} * f, \theta >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} | = | < \boldsymbol{\chi}, \nabla(U_{ij} * \theta) >_{\mathbf{L}_\alpha^p \times \mathbf{L}_{-\alpha}^{p'}} | \leq \| \boldsymbol{\chi} \|_{\mathbf{L}_\alpha^p} \| \nabla(U_{ij} * \theta) \|_{\mathbf{L}_{-\alpha}^{p'}}. \quad (4.16)$$

Comme

$$0 < n/p' - \alpha < n - 1, \quad (4.17)$$

la Proposition 4.2 permet de vérifier aisément que $\nabla(U_{ij} * \theta) \in \mathbf{W}_{-\alpha+1}^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$. On déduit alors de (4.16) et du Théorème 1.2 que :

$$| < U_{ij} * f, \theta >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} | \leq C \| \boldsymbol{\chi} \|_{\mathbf{L}_\alpha^p} \| \nabla^2 (U_{ij} * \boldsymbol{\theta}) \|_{L_{-\alpha+1}^{p'}}. \quad (4.18)$$

Appliquons maintenant, grâce à (4.17), le Lemme 4.5 dans (4.15) et (4.18). Il vient :

$$\forall \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad | < U_{ij} * f, \theta >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} | \leq C \| \boldsymbol{\chi} \|_{\mathbf{L}_\alpha^p} \| \theta \|_{L_{-\alpha+1}^{p'}},$$

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n), \quad | < \nabla(U_{ij} * f), \boldsymbol{\theta} >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} | \leq C \| \boldsymbol{\chi} \|_{\mathbf{L}_\alpha^p} \| \boldsymbol{\theta} \|_{\mathbf{L}_{-\alpha}^{p'}},$$

ce qui exprime la continuité annoncée. $\diamondsuit$

Lorsque $1 < n/p + l < n$, le Théorème 4.4 est alors un conséquence directe de la proposition précédente et du fait que pour $1 < n/p + \alpha < n$ on a

$$N_{[\alpha+1-n/p']} = \boldsymbol{\mathcal{P}}_0 \times \{0\} \text{ si } \ n-1 \leq n/p + \alpha < n \ \text{ et } \ \{(\mathbf{0}, 0)\} \ \text{ sinon.}$$

Notons qu'au passage nous avons traité le cas beaucoup plus général d'exposants α réels, ce qui nous amène (*modulo* une adaptation évidente de la Proposition 3.1) à énoncer le

Théorème 4.7 *Soient α un réel et p tels que $1 < n/p + \alpha < n$. Si $(\boldsymbol{f}, g)$ appartient à $(\mathbf{W}_{\alpha}^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_{\alpha}^{p}(\mathbb{R}^n)) \perp N_{[\alpha+1-n/p']}$, la formule (4.2) donne l'unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ dans $\mathbf{W}_{\alpha}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_{\alpha}^{p}(\mathbb{R}^n)$ du problème (S). De plus, on a l'estimation :*

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}_{\alpha}^{1,p}} + \| \pi \|_{L_{\alpha}^{p}} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_{\alpha}^{-1,p}} + \| g \|_{L_{\alpha}^{p}}).$$

Complétons pour finir la preuve du Théorème 4.4 qui est maintenant très simple.

Preuve du Théorème 4.4 : Considérons $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}_{l}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_{l}^{p}(\mathbb{R}^n)) \perp N_{[l+1-n/p']}$ avec $n/p + l \geq n$, soit les cas non traités par le Théorème 4.7. D'après le Théorème 1.1, il existe une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_{l}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_{l}^{p}(\mathbb{R}^n)$ du problème (S). Introduisons un réel $\alpha < l$ tel que $1 < n/p + \alpha < n$. Alors,

$$\mathbf{W}_{l}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_{l}^{p}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{W}_{\alpha}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_{\alpha}^{p}(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi, par unicité, $(\boldsymbol{u}, \pi)$ coïncide avec la solution donnée par le Théorème 4.7 (et donc par la formule (4.2)). $\diamondsuit$

4.3 Développements asymptotiques généralisés

Nous considérons, pour $p > n$ et $m \in \mathbb{N}$, des données

$$(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}_{n+m-1}^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_{n+m-1}^{p}(\mathbb{R}^n).$$

On vérifie aisément en posant $l = n + m - 1$ que l'hypothèse (H) est vérifiée et que $[l + 1 - n/p'] = m$. Alors, d'après le Théorème 1.2, le problème (S) admet une solution dans $\mathbf{W}_{n+m-1}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_{n+m-1}^{p}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si :

$$\forall (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in N_m, \quad <\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\lambda}>_{\mathbf{W}_{n+m-1}^{-1,p} \times \mathbf{W}_{1-n-m}^{1,p'}} + <g, \mu>_{L_{n+m-1}^{p} \times L_{1-n-m}^{p'}} = 0. \tag{4.19}$$

Dans ce cas, la solution est de plus représentée par la formule (4.2) (Théorème 4.4). Lorsque les conditions de compatibilités ne sont pas satisfaites, nous introduisons les moments généralisés d'une distribution $h \in W_{n+m-1}^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$:

$$\forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}^n, |\,\boldsymbol{\beta}\,| \leq m, \quad m_{\boldsymbol{\beta}}(h) = <h, \frac{\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\beta}}}{\boldsymbol{\beta}!}>_{W_{n+m-1}^{-1,p} \times W_{1-n-m}^{1,p'}},$$

qui sont définis d'après (2.2) et coïncident avec les moments classiques quand $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Nous démontrons une extension des propriétés de la Proposition 4.2 à des données à support *quelconque* et peu régulières, avec le

Théorème 4.8 *Soient $m \in \mathbb{N}$, $p > n$ et $(\boldsymbol{f}, g)$ dans $\mathbf{W}^{-1,p}_{n+m-1}(\mathbb{R}^n) \times L^p_{n+m-1}(\mathbb{R}^n)$. La solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ du problème (S) donnée par (4.2) vérifie pour tout $\boldsymbol{x}$ tel que $|\boldsymbol{x}| > 1$:*

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \leq m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|} \partial^{\boldsymbol{\beta}} U(\boldsymbol{x}) m_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{f}) + \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \leq m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|} \partial^{\boldsymbol{\beta}} F(\boldsymbol{x}) m_{\boldsymbol{\beta}}(\nabla g) + \boldsymbol{w}_m(\boldsymbol{x}), \quad (4.20)$$

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \leq m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|} \partial^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}) . m_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{f} - \nu \nabla g) + \tau_m(\boldsymbol{x}), \quad (4.21)$$

avec $(\boldsymbol{w}_m, \tau_m) \in \mathbf{W}^{1,p}_{n+m-1}(\mathbb{R}^n) \times L^p_{n+m-1}(\mathbb{R}^n)$ et $\boldsymbol{w}_m(\boldsymbol{x}) = o(r^{2-n-n/p-m})$.

Pour pouvoir démontrer ce théorème, nous commençons par donner un résultat abstrait qui nous fournira ensuite une décomposition adéquate pour les données $\boldsymbol{f}$ et g.

Lemme 4.9 *Soient E un espace de Banach, G un sous-espace dense de E et M un sous espace de E' de dimension $k < \infty$. Etant donnée une base $(f_1, \ldots, f_k)$ de M, il existe une famille $(g_1, \ldots, g_k)$ dans G telle que*

$$< f_i, g_j >_{E' \times E} = \delta_{ij}. \quad (4.22)$$

Tout élément $h \in E$ s'écrit alors $h = g_0 + h_0$ avec

$$g_0 = \sum_{i=1}^{k} < h, f_i > g_i \in G \quad et \quad h_0 = h - g_0 \in E \perp M.$$

Preuve : Il suffit de trouver une famille $(g_1, \ldots, g_k)$ d'éléments de G vérifiant (4.22); le reste en est une conséquence immédiate. Nous raisonnons par récurrence sur $k = \dim M$. Pour $k = 1$, g_1 existe, sinon f_1 s'annulerait sur G et serait donc identiquement nulle, ce qui est impossible. Supposons le résultat obtenu au rang k et établissons le au rang $k+1$. Pour cela, nous raisonnons par l'absurde: Etant donnée $(f_1, \ldots, f_{k+1})$ une base de M, il existe par hypothèse de récurrence $(g_1, \ldots g_k)$ tels que

$$< f_i, g_j >_{E' \times E} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

Nous supposons que g_{k+1} n'existe pas, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$

$$< f_i, g >_{E' \times E} = 0, \quad i = 1, \ldots, k \quad \Rightarrow \quad < f_{k+1}, g >_{E' \times E} = 0. \quad (4.23)$$

La propriété de gauche est vérifiée par $g = \tilde{g} - \sum_{i=1}^{k} < f_i, \tilde{g} > g_i$ pour tout $\tilde{g} \in G$. Ainsi,

$$\forall \tilde{g} \in G, \quad < f_{k+1}, \tilde{g} > = \sum_{i=1}^{k} (< f_i, \tilde{g} >< f_{k+1}, g_i >).$$

La densité de G dans E entraîne alors l'égalité: $f_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} < f_{k+1}, g_i > f_i$, qui contredit le fait que $(f_1, \ldots, f_{k+1})$ est une famille libre. $\diamondsuit$

Preuve du Théorème 4.8 : Appliquons le Lemme 4.9 avec

$$E = \mathbf{W}^{-1,p}_{n+m-1}(\mathbb{R}^n) \times L^p_{n+m-1}(\mathbb{R}^n), \quad M = \boldsymbol{\mathcal{P}}_m \times \mathcal{P}_{m-1}, \quad G = \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

On peut alors écrire $(\boldsymbol{f}, g) = (\boldsymbol{f}^1, g^1) + (\boldsymbol{f}^2, g^2)$ avec

$$\boldsymbol{f}^1 \in \mathbf{W}^{-1,p}_{n+m-1}(\mathbb{R}^n) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_m, \quad g^1 \in L^p_{n+m-1}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{m-1}, \quad (\boldsymbol{f}^2, g^2) \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

La formule (4.2) appliquée à $(\boldsymbol{f}^1, g^1)$ et $(\boldsymbol{f}^2, g^2)$ fournit en particulier des solutions $(\boldsymbol{u}^i, \pi^i)$, $i = 1, 2$ du problème :

$$-\nu \Delta \boldsymbol{u}^i + \nabla \pi^i = \boldsymbol{f}^i, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}^i = g^i.$$

Comme $N_m \subset \boldsymbol{\mathcal{P}}_m \times \mathcal{P}_{m-1}$, le couple $(\boldsymbol{f}^1, g^1)$ vérifie (4.19). Ainsi, le Théorème 4.4 montre que

$$(\boldsymbol{u}^1, \pi^1) \in \mathbf{W}^{1,p}_{n+m-1}(\mathbb{R}^n) \times L^p_{n+m-1}(\mathbb{R}^n).$$

D'autre part, d'après la Proposition 4.2 :

$$\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \le m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|} \partial^{\boldsymbol{\beta}} U(\boldsymbol{x}) m_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{f}^2) + \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \le m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|} \partial^{\boldsymbol{\beta}} F(\boldsymbol{x}) m_{\boldsymbol{\beta}}(\nabla g^2) + \boldsymbol{w}^2_m(\boldsymbol{x}),$$

$$\pi^2(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \le m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|} \partial^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}) . m_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{f}^2 - \nu \nabla g^2) + \tau^2_m(\boldsymbol{x}),$$

avec $(\boldsymbol{w}^2_m, \tau^2_m) \in \mathbf{W}^{1,p}_{n+m-1}(\mathbb{R}^n) \times L^p_{n+m-1}(\mathbb{R}^n)$.

On obtient le résultat en sommant ces deux solutions. En effet, la décomposition utilisée entraîne directement que :

$$\forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}^n, |\,\boldsymbol{\beta}\,| \le m, \quad m_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{f}^2) = m_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{f}).$$

De même, $m_{\boldsymbol{\beta}}(\nabla g^2) = m_{\boldsymbol{\beta}}(\nabla g)$ car pour tout $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}^n$, $|\,\boldsymbol{\beta}\,| \le m$:

$$< \nabla g, \frac{\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\beta}}}{\boldsymbol{\beta}!} >_{\mathbf{W}^{-1,p}_{n+m-1} \times \mathbf{W}^{1,p'}_{1-n-m}} = - < g, \operatorname{div} (\frac{\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\beta}}}{\boldsymbol{\beta}!}) >_{L^p_{n+m-1} \times L^{p'}_{1-n-m}},$$

et

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\beta}} / \boldsymbol{\beta}!) \in \mathcal{P}_{m-1}.$$

En outre, $\tau_m = \pi^1 + \tau^2_m \in L^p_{n+m-1}(\mathbb{R}^n)$ et $\boldsymbol{w}_m = \boldsymbol{u}^1 + \boldsymbol{w}^2_m \in \mathbf{W}^{1,p}_{n+m-1}(\mathbb{R}^n)$ avec $p > n$. La Proposition 3.9 montre alors que $\boldsymbol{w}_m(\boldsymbol{x}) = o(r^{2-n-m-n/p})$. ◇

Remarque 4.10 *i*) Nous avons établi un développement asymptotique de $\boldsymbol{u}$ dont l'ordre dépend de la décroissance des données et ne peut pas être amélioré sans hypothèse supplémentaire. En revanche, $\nabla \boldsymbol{u}$ ou π n'admettent pas en général de développement similaire car $\nabla \boldsymbol{w}_m$ et τ_m appartiennent seulement à $L^p_{n+m-1}(\mathbb{R}^n)$ et ne sont donc pas contrôlés ponctuellement à l'infini.

ii) Le Théorème 4.4 montre qu'il faut et suffit que $(\boldsymbol{f}, g)$ soit "orthogonal" à N_k, $k \leq m$ pour annuler tous les termes correspondant à $|\boldsymbol{\beta}| \leq k$ dans les développements (4.20) et (4.21). Il n'est donc pas nécessaire d'annuler tous les moments d'ordre inférieur à k de $\boldsymbol{f}$ et ∇g.

Pour des données à support compact, le Théorème 4.8 entraine que $\boldsymbol{u}$ admet un développement à tout ordre. Il en est en fait de même pour toutes ses dérivées ainsi que pour π.

Théorème 4.11 *Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ à supports inclus dans K. Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, tel que $|\boldsymbol{x}| > 2\sup_{\boldsymbol{z}\in K}|\boldsymbol{z}|$, la solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ donnée par (4.2) est infiniment dérivable et vérifie pour tout entier $m \geq 0$:*

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leq m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\partial^{\boldsymbol{\beta}} U(\boldsymbol{x}) m_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{f}) + \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leq m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\partial^{\boldsymbol{\beta}} F(\boldsymbol{x}) m_{\boldsymbol{\beta}}(\nabla g) + \boldsymbol{w}_m(\boldsymbol{x}),$$

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leq m} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\partial^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}).m_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{f} - \nu\nabla g) + \tau_m(\boldsymbol{x}),$$

avec, pour tout entier $k \geq 0$

$$|\nabla^k \boldsymbol{w}_m(\boldsymbol{x})| + |\boldsymbol{x}||\nabla^k \eta_m(\boldsymbol{x})| \leq C_{m,k,K}(\|\boldsymbol{f}\|_{W_0^{-1,p}} + \|g\|_{L^p})|\boldsymbol{x}|^{1-n-m-k}.$$

Preuve : Nous procédons en trois étapes. La première justifie la validité de la formule (4.2) et précise le sens des moments $m_{\boldsymbol{\beta}}$. Nous écrivons ensuite les données sous une forme adéquate, qui permet finalement de conclure par densité.

i) Fixons le compact K. Il est clair que $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_\alpha^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ pour tout réel α. C'est en particulier vrai pour $n/p + \alpha > 1$, ce qui donne un sens à la formule (4.2). De même, $\boldsymbol{\beta}$ étant donné, les moments généralisés

$$m_{\boldsymbol{\beta}}(f) = < f, \frac{\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\beta}}}{\boldsymbol{\beta}!} >_{W_\alpha^{-1,p}\times W_{-\alpha}^{1,p'}},$$

sont bien définis, quitte à choisir α assez grand.

ii) Grâce au Théorème 1.2, on montre par dualité (suivre la preuve de la proposition 4.1 dans [5]) qu'il existe un tenseur $G \in L^p_{-1}(\mathbb{R}^n)$ d'ordre deux tel que $\operatorname{div} G = \boldsymbol{f}$ avec

$$\| G \|_{L^p_{-1}} \leq C\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_{-1}^{-1,p}} \leq C_K\| \boldsymbol{f} \|_{W_0^{-1,p}}, \tag{4.24}$$

où $C_K > 0$ ne dépend que de p, n et K. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et égale à 1 sur K; alors

$$\operatorname{div}(G\chi) = \boldsymbol{f}\chi + G\nabla\chi = \boldsymbol{f} + G\nabla\chi.$$

Posons finalement $H = G\chi$ et $\boldsymbol{\psi} = -G\nabla\chi$, on obtient alors

$$\boldsymbol{f} = \operatorname{div} H + \boldsymbol{\psi},$$

où H et $\boldsymbol{\psi}$ ont un support compact et vérifient grâce à (4.24) :

$$\| H \|_{L^p} + \| \boldsymbol{\psi} \|_{\mathbf{L}^p} \leq C_K \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}}, \tag{4.25}$$

iii) Soient $H^\varepsilon, \boldsymbol{\psi}^\varepsilon$ et g^ε des suites de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ convergeant respectivement vers $H, \boldsymbol{\psi}$ et g dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(\varepsilon \to 0)$. Quitte à tronquer ces fonctions, on suppose qu'elles sont à supports dans un compact fixe K' contenant K. Alors,

$$\operatorname{div} H^\varepsilon + \boldsymbol{\psi}^\varepsilon \to \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n),$$

et nous posons

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon = \operatorname{div}(U * H^\varepsilon) + U * \boldsymbol{\psi}^\varepsilon + F * \nabla g^\varepsilon, \quad \pi^\varepsilon = \operatorname{div}(\mathbf{Q} * H^\varepsilon) + \mathbf{Q} * (\boldsymbol{\psi}^\varepsilon - \nu \nabla g^\varepsilon).$$

D'après la définition (4.5), on a pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$:

$$< \operatorname{div}(U * H^\varepsilon), \boldsymbol{\varphi} >_{\boldsymbol{\mathcal{D}}' \times \boldsymbol{\mathcal{D}}} = -\int_{K'} H^\varepsilon(\boldsymbol{x}) \nabla(\check{U} * \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

Or, $\nabla(\check{U} * \boldsymbol{\varphi})$ étant localement bornée, on peut passer à la limite dans cette intégrale grâce au Théorème de Lebesgue, soit encore $\operatorname{div}(U * H^\varepsilon) \to U * \operatorname{div} H$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On montre de même que $(\boldsymbol{u}^\varepsilon, \pi^\varepsilon) \to (\boldsymbol{u}, \pi)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

iv) Fixons un entier m. D'après la Proposition 4.2, $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ et π^ε admettent un développement à l'ordre m, pour tout $\varepsilon > 0$. Comme $\operatorname{div}(U * H^\varepsilon) = U * \operatorname{div} H^\varepsilon$, on dispose de plus de deux écritures différentes de celui-ci. Dans l'écriture associée à $U * \operatorname{div} H^\varepsilon$, les coefficients sont $m_{\boldsymbol{\beta}}(\operatorname{div} H^\varepsilon + \boldsymbol{\psi}^\varepsilon)$ et $m_{\boldsymbol{\beta}}(\nabla g^\varepsilon)$ et il est clair que :

$$\forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\beta}| \leq m, \quad m_{\boldsymbol{\beta}}(\operatorname{div} H^\varepsilon + \boldsymbol{\psi}^\varepsilon) \stackrel{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} m_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{f}), \quad m_{\boldsymbol{\beta}}(\nabla g^\varepsilon) \stackrel{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} m_{\boldsymbol{\beta}}(\nabla g).$$

Considérons maintenant les restes des développements qui sont communs aux deux écritures. En utilisant l'écriture associée à $\operatorname{div}(U * H^\varepsilon)$, on déduit par différence de la Proposition 4.2 que pour tous $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, pour tout entier $k \geq 0$ et si $|\boldsymbol{x}| > 2 \sup_{z \in K'} |\boldsymbol{z}|$:

$$|\nabla^k(\boldsymbol{w}_m^\varepsilon - \boldsymbol{w}_m^{\varepsilon'})(\boldsymbol{x})| \leq C_{m,k}(\| H^\varepsilon - H^{\varepsilon'} \|_{L^1} + \| \boldsymbol{\psi}^\varepsilon - \boldsymbol{\psi}^{\varepsilon'} \|_{\mathbf{L}^1} + \| g^\varepsilon - g^{\varepsilon'} \|_{L^1}) |\boldsymbol{x}|^{1-n-m-k},$$

$$|\nabla^k(\tau_m^\varepsilon - \tau_m^{\varepsilon'})(\boldsymbol{x})| \leq C_{m,k}(\| H^\varepsilon - H^{\varepsilon'} \|_{L^1} + \| \boldsymbol{\psi}^\varepsilon - \boldsymbol{\psi}^{\varepsilon'} \|_{\mathbf{L}^1} + \| g^\varepsilon - g^{\varepsilon'} \|_{L^1}) |\boldsymbol{x}|^{-n-m-k}.$$

Comme $H^\varepsilon, \boldsymbol{\psi}^\varepsilon$ et g^ε sont de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et ont un support fixe, elles sont aussi de Cauchy dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. D'où la convergence de $\boldsymbol{w}_m^\varepsilon$ et τ_m^ε vers $\boldsymbol{w}_m$ et τ_m qui vérifient :

$$\begin{aligned} |\nabla^k \boldsymbol{w}_m(\boldsymbol{x})| + |\boldsymbol{x}||\nabla^k \eta_m(\boldsymbol{x})| &\leq C_{m,k}(\| H \|_{L^1} + \| \boldsymbol{\psi} \|_{\mathbf{L}^1} + \| g \|_{L^1}) |\boldsymbol{x}|^{1-n-m-k}, \\ &\leq C_{m,k,K}(\| \boldsymbol{f} \|_{W_0^{-1,p}} + \| g \|_{L^p}) |\boldsymbol{x}|^{1-n-m-k}, \end{aligned}$$

d'après (4.25). Le théorème est donc établi par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. $\diamondsuit$

5 Régularité des solutions

Nous démontrons ici des propriétés de régularité des solutions obtenues avec le Théorème 1.2 que nous regroupons en trois ensembles distincts. Pour le premier, nous imposons plus de régularité sur $\boldsymbol{f}$ et g et la répercutons sur les dérivées $\nabla^2 \boldsymbol{u}$ et $\nabla\pi$ des solutions. Supposons ensuite que les données permettent de trouver une solution vérifiant une condition (C_1) mais aussi une solution vérifiant une condition (C_2) (celles-ci provenant du Théorème 1.2 ou du Théorème 5.1 ci-dessous). Est-il alors possible de trouver une solution qui satisfasse simultanément (C_1) et (C_2) ? Le troisième groupe de résultats est consacré, quant à lui, à des propriétés de régularité $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ (voir définition ci-dessous), étude notamment motivée par ses applications aux équations de Navier-Stokes suggérées par [17].

5.1 Régularité des dérivées secondes

Dans ce paragraphe, nous considérons toujours $l \in \mathbb{Z}$ et p tels que l'hypothèse (H) soit satisfaite et nous utilisons les espaces avec poids d'ordre 2 définis par (2.3) pour démontrer le

Théorème 5.1 *Soient l un entier, p satisfaisant (H) et $(\boldsymbol{u},\pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$ vérifiant le problème (S). Si $(\boldsymbol{f},g) \in \mathbf{L}_{l+1}^p(\mathbb{R}^n) \times W_{l+1}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ alors $(\boldsymbol{u},\pi)$ appartient à $\mathbf{W}_{l+1}^{2,p}(\mathbb{R}^n) \times W_{l+1}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. En outre, si $n/p' \neq l+1$:*

$$\inf_{(\boldsymbol{\lambda},\mu)\in N_{[1-l-n/p]}} (\| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\mathbf{W}_{l+1}^{2,p}} + \| \pi + \mu \|_{W_{l+1}^{1,p}}) \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}_{l+1}^p} + \| g \|_{W_{l+1}^{1,p}}), \tag{5.1}$$

et si $n/p' = l+1$:

$$\inf_{(\boldsymbol{\lambda},\mu)\in N_{[2-n]}} (\| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\mathbf{W}_{l+1}^{2,p}} + \| \pi + \mu \|_{W_{l+1}^{1,p}}) \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}_{l+1}^p} + \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} + \| g \|_{W_{l+1}^{1,p}}),$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de ν, n, p et l.

Preuve : On se ramène à des propriétés de régularité du problème de Laplace grâce au problème (S') (voir la preuve de la Proposition 3.3).

i) Le cas $n/p' \neq l+1$: Si $(\boldsymbol{u},\pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$ satsifait le système (S), alors nous avons vu que (cf. Proposition 3.3) :

$$\Delta\pi = \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \nu\Delta g \in W_l^{-2,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[2+l-n/p']}^{\Delta}.$$

De plus, comme $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}_{l+1}^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in W_{l+1}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{div} \boldsymbol{f} + \nu\Delta g$ appartient en fait à $W_{l+1}^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, il vient

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} + \nu\Delta g \in W_{l+1}^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[2+l-n/p']}^{\Delta}.$$

Or, comme $n/p' \neq l+1$, l'isomorphisme (2.5) avec $k = l+1$ et $q = p$ fournit l'existence d'une fonction $\eta \in W^{1,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\Delta\eta = \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \nu\Delta g = \Delta\pi.$$

Par conséquent, $\pi - \eta$ est un polynôme harmonique $\mu \in L^p_l(\mathbb{R}^n)$. Les injections (2.2) prouvent alors que $\mu \in \mathcal{P}_{[l-n/p]} \subset W^{1,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, $\pi = \eta + \mu$ est la somme de deux fonctions de $W^{1,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)$, d'où la régularité attendue pour π.

De même, on a $\nu\Delta\boldsymbol{u} = \nabla\pi - \boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}_l(\mathbb{R}^n)\perp\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\Delta}_{[l+1-n/p']}$, et donc par hypothèse

$$\nu\Delta\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^p_{l+1}(\mathbb{R}^n)\perp\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\Delta}_{[l+1-n/p']}.$$

L'isomorphisme (2.6) avec $k = l+1$ et $q = p$ montre donc l'existence de $\boldsymbol{v} \in W^{2,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta\boldsymbol{v} = \Delta\boldsymbol{u}$. Comme pour π, ceci amène à conclure que $\boldsymbol{u}$ appartient à $\mathbf{W}^{2,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)$.

Finalement, comme $n/p' \neq l+1$, les injections suivantes sont continues :

$$W^{2,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n) \subset W^{1,p}_l(\mathbb{R}^n), \quad W^{1,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n) \subset L^p_l(\mathbb{R}^n), \quad L^p_{l+1}(\mathbb{R}^n) \subset W^{-1,p}_l(\mathbb{R}^n). \tag{5.2}$$

De plus, pour chacune d'elles, on vérifie que les polynômes inclus dans le plus grand espace sont aussi dans le plus petit. Ceci montre, avec le Théorème 1.3, que l'opérateur

$$T \ : (\mathbf{W}^{2,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n) \times W^{1,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n))/N_{[1-l-n/p]} \to (\mathbf{L}^p_{l+1}(\mathbb{R}^n) \times W^{1,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n))\perp N_{[l+1-n/p']},$$

est bien continu et injectif. Nous venons de prouver qu'il est surjectif. Il est donc bijectif et son inverse est continu, d'où l'estimation.

ii) Le cas $n/p' = l+1$: On ne peut plus utiliser dans ce cas les isomorphismes (2.5) et (2.6). En revanche, on a l'isomorphisme (démontré en annexe) :

$$\Delta \ : \ W^{2,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[2-n]} \longrightarrow L^p_{l+1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1,p}_l(\mathbb{R}^n)\perp\mathcal{P}_0. \tag{5.3}$$

Par hypothèse, $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p_{l+1}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}^{-1,p}_l(\mathbb{R}^n)\perp\mathcal{P}_0$, et il en est de même pour ∇g. En effet, par définition de $W^{1,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)$, on a $\nabla g \in \mathbf{L}^p_{l+1}(\mathbb{R}^n)$. De plus, comme $n/p \neq -l$, $W^{1,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p'}_{-l-1}(\mathbb{R}^n)$ de sorte qu'avec l'injection duale, on montre que ∇g appartient aussi à $\mathbf{W}^{-1,p}_l(\mathbb{R}^n)\perp\mathcal{P}_0$. Introduisons grâce à (5.3) la fonction

$$\eta = \operatorname{div} \Delta^{-1}(\boldsymbol{f} + \nu\nabla g).$$

C'est un élément de $W^{1,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie de plus $\Delta\eta = \Delta\pi$. On en déduit comme au point (i) que $\pi \in W^{1,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)$.

De même, on établit que

$$\nabla\pi - \boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p_{l+1}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}^{-1,p}_l(\mathbb{R}^n)\perp\boldsymbol{\mathcal{P}}_0,$$

ce qui permet de trouver $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}^{2,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta \boldsymbol{v} = \Delta \boldsymbol{u}$. Nous concluons donc à nouveau que $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{2,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)$ et l'estimation découle de l'adaptation *mutatis mutandis* du raisonnement effectué au point (i). $\diamondsuit$

On peut avec de la régularité supplémentaire sur $\boldsymbol{f}$ et g caractériser celle des dérivées d'ordre supérieur des solutions grâce à des propriétés de régularité du Laplacien (voir [5], th. 6.6). Nous ne détaillons pas ces résultats ici.

En revanche, le résultat précédent et la Proposition 3.9 entraînent une amélioration du Théorème 4.8. En l'occurence, pour des données plus régulières, nous obtenons aussi un développement de $\nabla \boldsymbol{u}$ et π.

Corollaire 5.2 *Si $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{L}^p_{n+m}(\mathbb{R}^n) \times W^{1,p}_{n+m}(\mathbb{R}^n)$ dans le Théorème 4.8, alors*

$$\nabla \boldsymbol{w}_m(x) = o(r^{1-n-n/p-m}) \quad et \quad \tau_m(\boldsymbol{x}) = o(r^{1-n-n/p-m}).$$

5.2 D'autres résultats de régularité L^p

Nous montrons maintenant qu'il est possible d'améliorer certaines régularités dans les espaces avec poids, par exemple pour des données vérifiant les hypothèses de la Proposition 3.3 avec deux exposants distincts.

Proposition 5.3 *Soient p et q deux réels tels que $1 < p < q < +\infty$. Etant donnés $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}_0(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}^{-1,q}_0(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la condition (3.1), et $g \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, le problème (S) admet une solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ avec*

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{1,p}_0(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}^{1,q}_0(\mathbb{R}^n) \quad et \quad \pi \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n). \tag{5.4}$$

De plus, $(\boldsymbol{u}, \pi)$ est unique à un élément de $N_{[1-n/p]}$ près dans la classe (5.4) et il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de ν, p, q et n telle que :

$$\inf_{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{[1-n/p]}} (\| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_0} + \| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\mathbf{W}^{1,q}_0}) + \| \pi \|_{L^p} + \| \pi \|_{L^q} \leq$$
$$C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_0} + \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{-1,q}_0} + \| g \|_{L^p} + \| g \|_{L^q}).$$

Preuve : La Proposition 3.3 montre l'existence de

$$(\boldsymbol{u}^1, \pi^1) \in \mathbf{W}^{1,p}_0(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{u}^2, \pi^2) \in \mathbf{W}^{1,q}_0(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n),$$

solutions du problème (S). Celle des deux qui a le meilleur comportement à l'infini au sens introduit au paragraphe 3.3 (ici, $(\boldsymbol{u}^1, \pi^1)$ car $p < q$) vérifie la régularité souhaitée. En effet, les deux solutions sont liées par (voir Remarque 3.2) :

$$\boldsymbol{u}^1 - \boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{\lambda}, \quad \pi^1 - \pi^2 = \mu, \qquad (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in \cup_{k \geq 0} N_k,$$

En particulier, $\boldsymbol{\lambda}$ (*resp.* μ) appartient à $\mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)+\mathbf{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ (*resp.* $L^p(\mathbb{R}^n)+L^q(\mathbb{R}^n)$), ce qui nous permet de majorer son degré. En effet, en reprenant les notations du paragraphe 3.3, comme $p<q$, il vient :

$$\begin{aligned}\| \boldsymbol{\lambda}(r,.) \|_{L^p(\Sigma)} &\leq \| \boldsymbol{u}^1(r,.) \|_{L^p(\Sigma)} + \| \boldsymbol{u}^2(r,.) \|_{L^p(\Sigma)},\\ &\leq \| \boldsymbol{u}^1(r,.) \|_{L^p(\Sigma)} + C\| \boldsymbol{u}^2(r,.) \|_{L^q(\Sigma)},\end{aligned}$$

ce qui implique d'après la Proposition 3.8 que :

$$\| \boldsymbol{\lambda}(r,.) \|_{L^p(\Sigma)} = \begin{cases} o(r^{1-n/q}) & \text{si } q\neq n,\\ o(\ln r) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Un argument évident d'intégration montre que $\boldsymbol{\lambda}$ est alors un polynôme constant, nul si $q<n$. Autrement dit, d'après (2.2)

$$\boldsymbol{\lambda}\in \mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)\cap \mathbf{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^n). \tag{5.5}$$

Mais comme $\boldsymbol{\lambda}$ est constant, on a $\Delta\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$ et donc $\nabla\mu=\mathbf{0}$. Ainsi, μ est aussi constant et appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)+L^q(\mathbb{R}^n)$ ce qui entraine $\mu=0$. Finalement, il est clair d'après (5.5) que :

$$\boldsymbol{u}^1=\boldsymbol{u}^2+\boldsymbol{\lambda}\in \mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)\cap \mathbf{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \pi^1=\pi^2\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n).$$

Les propriétés d'unicité résultent de la Proposition 3.1 et l'estimation s'obtient comme dans la Proposition 3.5. $\diamondsuit$

Cette méthode de démonstration s'applique plus généralement pour montrer que l'on peut avoir des régularités $\mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n)\cap\mathbf{W}_k^{1,q}(\mathbb{R}^n)$. La Proposition 5.3 permet de plus d'obtenir une condition suffisante pour que le problème (S) ait une solution $(\boldsymbol{u},\pi)$ telle que $\boldsymbol{u}$ tende vers un vecteur constant arbitraire à l'infini.

Corollaire 5.4 *Sous les hypothèses de la Proposition 5.3, avec de plus $p<n<q$, l'unique solution $(\boldsymbol{u},\pi)$ vérifiant (5.4) du problème (S) satisfait en outre*

$$\boldsymbol{u}\in L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \textit{et} \quad \lim_{|\boldsymbol{x}|\to+\infty}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}. \tag{5.6}$$

En particulier, pour tout vecteur constant $\boldsymbol{u}_\infty$, le couple $(\boldsymbol{v},\pi)$ avec $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}_\infty$ est la seule solution du problème (S) vérifiant :

$$\nabla\boldsymbol{v}\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n), \quad \pi\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n) \quad \textit{et} \quad \lim_{|\boldsymbol{x}|\to+\infty}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}_\infty.$$

Preuve : Nous prouvons les propriétés vérifiées par $\boldsymbol{u}$: celles de $\boldsymbol{v}$ en sont une conséquence directe. L'unicité de $(\boldsymbol{u},\pi)$ est immédiate car $p<n$. La propriété (5.6) (qui n'est pas établie par la Proposition 3.9) découle de la relation suivante :

$$\text{si } p<n,\quad W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)=\{\, w\in L^{p^*}(\mathbb{R}^n),\ \nabla w\in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)\}\ \text{ avec } 1/p^*=1/p-1/n,$$

où l'égalité est algébrique et topologique. En effet, comme $p<n$, le Théorème 1.1 d'une part et les injections de Sobolev d'autre part montrent que ces deux espaces admettent comme norme équivalente la semi-norme $\|\nabla\ \|_{\mathbf{L}^p}$. Par conséquent,

$$\boldsymbol{u}\in \mathbf{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)\ \text{ et }\ \nabla \boldsymbol{u}\in L^q(\mathbb{R}^n)\ \text{ avec } q>n,$$

ce qui implique (5.6) de manière standard . $\Diamond$

Du Théorème 5.1, nous déduisons un résultat de régularité du même type. Il généralise avec le corollaire qui lui succède les résultats établis dans Varnhorn [69] (*cf.* Th. 3.1, p. 208 qui prouve les mêmes résultats avec $n\geq 3, n/3<p<n/2$ et $q=p^{**}$).

Proposition 5.5 *Soient $p\neq n$ et $q\neq n$ deux réels avec $1<p<q<+\infty$. Etant donnés $\boldsymbol{f}\in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)\cap\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n)$ et $g\in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)\cap W_0^{1,q}(\mathbb{R}^n)$, le problème (S) admet une solution $(\boldsymbol{u},\pi)$ avec*

$$\boldsymbol{u}\in \mathbf{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)\cap \mathbf{W}_0^{2,q}(\mathbb{R}^n)\quad \text{et}\quad \pi\in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)\cap W_0^{1,q}(\mathbb{R}^n), \tag{5.7}$$

unique dans cette classe à un élément de $N_{[2-n/p]}$ près. De plus, il existe une constante $C>0$ ne dépendant que de ν,p,q et n telle que :

$$\inf_{(\boldsymbol{\lambda},\mu)\in N_{[2-n/p]}}(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{W}_0^{2,p}}+\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{W}_0^{2,q}}+\|\pi+\mu\|_{W_0^{1,p}}+\|\pi+\mu\|_{W_0^{1,q}})\leq$$
$$C(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{L}^p}+\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{L}^q}+\|g\|_{W_0^{1,p}}+\|g\|_{W_0^{1,q}}).$$

La démonstration de cette proposition est similaire à celle de la Proposition 5.3. On peut en effet encore utiliser les injections (2.2) car si $r\neq n$, $W_0^{2,r}(\mathbb{R}^n)\subset W_{-1}^{1,r}(\mathbb{R}^n)$. En outre, on a aussi l'égalité topologique et algébrique :

$$\mathbf{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)=\{\,\boldsymbol{w}\in\mathbf{L}^{p^{**}}(\mathbb{R}^n),\ \nabla\boldsymbol{w}\in\mathbf{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n),\ \nabla^2\boldsymbol{w}\in\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)\},\ \text{si } p<n/2.$$

Ainsi, en itérant les arguments développés pour le Corollaire 5.4, on obtient le

Corollaire 5.6 *Sous les hypothèses de la Proposition 5.5 avec de plus $p<n/2$ et $q>n$, l'unique solution $(\boldsymbol{u},\pi)$ vérifiant (5.7) du problème (S) satisfait en outre*

$$\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{u},\pi\in L^\infty(\mathbb{R}^n),\quad \lim_{|\boldsymbol{x}|\to+\infty}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0},\quad \lim_{|\boldsymbol{x}|\to+\infty}\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\lim_{|\boldsymbol{x}|\to+\infty}\pi(\boldsymbol{x})=0.$$

5.3 Régularité et espace $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$

Dans un travail récent, R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer et S. Semmes [17] ont montré que le terme non-linéaire $\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}$ des équations de Navier-Stokes vérifie de meilleures propriétés de régularité que celles fournies par l'inégalité de Hölder. Par exemple, si $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $\nabla\boldsymbol{u} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$, alors $\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}$ appartient à $\boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n)$ qui est inclus $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$. De même, si $\nabla\boldsymbol{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$, alors $\operatorname{div}(\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Cette régularité supplémentaire permet d'améliorer dans les équations stationnaires de Navier-Stokes celle de la vitesse et de la pression pourvu que des résultats similaires soient obtenus pour le problème (S).

Les espaces $\mathcal{H}^1$, BMO, VMO : Nous introduisons l'espace

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n), \forall j = 1, \dots, n,\ R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}, \tag{5.8}$$

où les transformées de Riesz R_j sont données par (4.9).

Cet espace, muni, par exemple, de la norme

$$\| f \|_{\mathcal{H}^1} = \| f \|_{L^1} + \sum_{j=1}^{n} \| R_j f \|_{L^1},$$

est complet mais pas réflexif (voir [64], Chap.III,IV ou [54] pour une étude détaillée). De plus,

$$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) = (\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n))' \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) = (\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n))', \tag{5.9}$$

où l'espace BMO$(\mathbb{R}^n)$ (pour "bounded mean oscillations") est l'ensemble des fonctions localement intégrables et définies à une constante près telles que :

$$\| f \|_{\mathrm{BMO}} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| d\boldsymbol{x} < +\infty,$$

lorsque Q décrit l'ensemble des cubes de $\mathbb{R}^n$ (f_Q désigne la moyenne de f sur Q). L'espace VMO$(\mathbb{R}^n)$ (pour "vanishing mean oscillation") est l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans BMO$(\mathbb{R}^n)$ et VMO$(\mathbb{R}^n) \neq$BMO$(\mathbb{R}^n)$.

On peut lier $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ et VMO$(\mathbb{R}^n)$ aux espaces avec poids grâce au résultat suivant :

Lemme 5.7 *Les inclusions*

$$W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_0 \subset \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{H}^1 \subset W_0^{-1,n'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_0,$$

ont lieu avec injections continues.

Preuve : Nous établissons la première injection, la seconde en découle par dualité d'après (5.9). Soient $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $Q_0 = [0,1]^n$. Comme $|Q_0| = 1$, l'inégalité de Poincaré-Wirtinger et l'injection continue $L^n(Q_0) \subset L^1(Q_0)$ montrent que :

$$\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} |f - f_{Q_0}| d\boldsymbol{x} \leq C \| \nabla f \|_{\mathbf{L}^n(Q_0)}.$$

Nous en déduisons aisément par homogénéité que pour tout cube Q :

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| d\boldsymbol{x} \leq C\| \nabla f \|_{\mathbf{L}^n(Q)} \leq C\| \nabla f \|_{\mathbf{L}^n(\mathbb{R}^n)}.$$

La semi-norme de droite est équivalente ($cf.$ Théorème 1.1) à la norme $\| \ \|_{W_0^{1,n}/\mathcal{P}_0}$ de sorte que la conclusion résulte de la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$. $\diamondsuit$

Nous allons déduire la régularité des solutions du problème de Stokes du lemme suivant qui traite le cas -plus simple- de l'équation de Poisson.

Lemme 5.8 *Soient $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ et $v \in W_0^{1,n'}(\mathbb{R}^n)$ tels que $-\Delta v = f$. Alors, on a aussi $\nabla^2 v \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ avec*

$$\| \nabla^2 \boldsymbol{v} \|_{\mathcal{H}^1} \leq C\| f \|_{\mathcal{H}^1}.$$

Preuve : Rappelons que les tranformées de Riesz R_j sont continues de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, ce qui donne

$$\| R_i R_j \Delta v \|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\| f \|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Mais l'égalité (4.10) et la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbf{W}_0^{1,n'}(\mathbb{R}^n)$ entrainent d'autre part que

$$R_i R_j \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j},$$

d'où le résultat. $\diamondsuit$

Une première application de ce lemme au problème (S) est donnée par le

Théorème 5.9 *Soient $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{n'}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\nabla g \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n)$. Alors, toute solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,n'}(\mathbb{R}^n) \times L^{n'}(\mathbb{R}^n)$ du problème (S) vérifie de plus*

$$\nabla \pi, \nabla^2 \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n),$$

avec l'estimation :

$$\| \nabla^2 \boldsymbol{u} \|_{\mathcal{H}^1} + \| \nabla \pi \|_{\mathcal{H}^1} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathcal{H}^1} + \| \nabla g \|_{\mathcal{H}^1}).$$

En outre, si $n = 2$, alors $\boldsymbol{u}$ est continue, bornée sur $\mathbb{R}^2$, admet une limite à l'infini et satisfait l'estimation

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^2)/\boldsymbol{\mathcal{P}}_0} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathcal{H}^1} + \| \nabla g \|_{\mathcal{H}^1}).$$

Preuve : D'après le Lemme 5.7,

$$\boldsymbol{f} - \nu\nabla g \in \mathbf{W}_0^{-1,n'}(\mathbb{R}^n) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0.$$

Soit alors $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}_0^{1,n'}(\mathbb{R}^n)$ une solution du problème :

$$-\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \nu\nabla g,$$

donnée par l'isomorphisme (2.5) avec $p = n'$ et $l = 0$. D'après le Lemme 5.8, on a de plus

$$\| \nabla^2 \boldsymbol{v} \|_{\mathcal{H}^1} \leq C \| \boldsymbol{f} - \nu\nabla g \|_{\mathcal{H}^1}.$$

Par ailleurs, il est clair que $\operatorname{div} \boldsymbol{v} - \pi \in L^{n'}(\mathbb{R}^n)$ est harmonique. Ainsi, $\pi = \operatorname{div} \boldsymbol{v}$, d'où la régularité de $\nabla\pi$. La régularité de $\nabla^2\boldsymbol{u}$ découle ensuite, *via* le Lemme 5.8, de la première équation du problème (S). Enfin, les propriétés spécifiques à la dimension 2, viennent du fait que $\nabla^2\boldsymbol{u} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et résultent par densité de l'inégalité (voir [12], Remarque 14, p. 168) :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \ \| \varphi \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C \| \nabla^2 \varphi \|_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \quad \diamondsuit$$

On peut aussi améliorer la régularité de la pression avec le

Théorème 5.10 *Soit* $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{L}^{n'}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{1,n'}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $\operatorname{div} \boldsymbol{f} + \nu\Delta g \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. *Alors, toute solution* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{2,n'}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{1,n'}(\mathbb{R}^n)$ *du problème* (S) *vérifie de plus* $\nabla^2\pi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ *et l'estimation :*

$$\| \nabla^2 \pi \|_{\mathcal{H}^1} \leq C \| \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \nu\Delta g \|_{\mathcal{H}^1}.$$

En outre, si $n = 2$*, alors* π *est continue, bornée sur* $\mathbb{R}^2$*, admet une limite à l'infini et satisfait l'estimation :*

$$\| \pi \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)/\mathcal{P}_0} \leq C \| \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \nu\Delta g \|_{\mathcal{H}^1}.$$

Preuve : Comme $\Delta\pi = \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \nu\Delta g$, on obtient la régularité $\mathcal{H}^1$ par application directe du Lemme 5.8. En dimension 2, le raisonnement détaillé précédemment donne la conclusion. $\diamondsuit$

6 Le cas $p = +\infty$

Revenons un instant en arrière et considérons pour $p > n$ avec $n \geq 3$ un tenseur $G \in L^p_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ d'ordre 2. Posons $\boldsymbol{f} = \operatorname{div} G$ et $g = 0$, alors l'hypothèse (H) est vérifiée avec $l = n - 1$ et

$$< f_i, 1 >_{W^{-1,p}_{n-1} \times W^{1,p'}_{1-n}} = \sum_{j=1}^{n} < G_{ij}, \partial_j 1 >_{L^p_{n-1} \times L^{p'}_{1-n}} = 0, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{6.1}$$

c'est à dire que $(\boldsymbol{f}, 0) \in (\mathbf{W}^{-1,p}_{n-1}(\mathbb{R}^n) \times L^p_{n-1}(\mathbb{R}^n)) \perp N_0$. D'après le Théorème 1.2 et le Corollaire 3.10, le problème (S) admet alors une et une seule solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ avec

$$(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}_{n-1}(\mathbb{R}^n) \times L^p_{n-1}(\mathbb{R}^n), \qquad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = o(r^{2-n-n/p}),$$

à l'infini.

Nous envisageons ici le même type de données mais avec $p = +\infty$, soit :

$$\boldsymbol{f} = \operatorname{div} G, \quad \text{avec } \rho^{n-1} G \in L^\infty(\mathbb{R}^n), n \geq 3.$$

Dans ce cas, l'égalité (6.1) n'a plus de sens. Nous construisons cependant, en imposant une condition d'oscillation à G, une solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ du problème (S) avec

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = o(r^{2-n}).$$

Pour cela, désignons par $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n)$ l'espace des mesures bornées sur $\mathbb{R}^n$ normé par

$$\| \mu \|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n)} = \int |d\mu|.$$

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ étant continue de $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on se donne des mesures $\mu_{ij} \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n)$ et on pose :

$$G_{ij} = \frac{\mathcal{F}\mu_{ij}}{|\, \boldsymbol{x} \,|^{n-1}} \psi, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{6.2}$$

où $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, est nulle au voisinage de l'origine et vaut 1 au voisinage de l'infini, de sorte que $\rho^{n-1} G \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Notre résultat est alors le suivant :

Théorème 6.1 *Soient $n \geq 3$, $\gamma > 0$ un réel, et $\mu_{ij} \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n)$, $i, j = 1, \dots, n$ telles que $\operatorname{supp} \mu_{ij} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n,\ |\, \xi \,| > \gamma\}$. Le tenseur G étant défini par* (6.2)*, le couple $(\boldsymbol{u}, \pi)$ donné par :*

$$u_i = \sum_{j,k=1}^{n} (\partial_k U_{ij}) * G_{kj} \quad \textit{et} \quad \pi = \sum_{j,k=1}^{n} \partial_k (Q_j * G_{kj}). \tag{6.3}$$

est solution du problème (S) avec $\boldsymbol{f} = \operatorname{div} G$ et $g = 0$ et vérifie $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = o(r^{2-n})$.

Avant de donner la preuve de ce théorème, signalons qu'il améliore la décroissance à l'infini des solutions du problème (S) données par le résultat suivant (voir [28], lemme 1.2, p. 851) :

Théorème 6.2 (Galdi-Simader [28]) *Soient $n \geq 3$ et un tenseur G d'ordre 2 tel que $\rho^{n-1} G \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Etant donnés $\boldsymbol{f} = \operatorname{div} G$ et $g = 0$, la formule* (6.3) *fournit la seule solution du problème (S) telle que $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,q}_0(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall q > n'$ ainsi que $\rho^{n-2} \boldsymbol{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, avec de plus l'estimation :*

$$\| \rho^{n-2} \boldsymbol{u} \|_{L^\infty} + \| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}^{1,q}_0} + \| \pi \|_{L^p} \leq C \| \rho^{n-1} G \|_{L^\infty}. \tag{6.4}$$

Preuve du Théorème 6.1 : La démonstration est basée sur l'utilisation de la formule (6.3). Nous en donnons une version scalaire en introduisant H une fonction homogène de degré $1-n$, régulière en dehors de l'origine et $\mu \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\operatorname{supp} \mu \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n,\ |\,\xi\,| > \gamma\},\ \gamma > 0.$$

En suivant (6.2), nous posons

$$G(\boldsymbol{x}) := \frac{\mathcal{F}\mu(\boldsymbol{x})}{|\,\boldsymbol{x}\,|^{n-1}}\psi(\boldsymbol{x}).$$

qui vérifie trivialement $\rho^{n-1}G \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et nous montrons que la fonction

$$H * G(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} H(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y},$$

qui est clairement définie partout, vérifie $H * G(\boldsymbol{x}) = o(r^{2-n})$.

Commençons par écrire $G = G_0 + G_1$ avec

$$G_0(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathcal{F}\mu(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|^{n-1}},\quad G_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathcal{F}\mu(\boldsymbol{x})}{|\,\boldsymbol{x}\,|^{n-1}}(1-\psi(\boldsymbol{x})).$$

Alors, G_1 est à support compact et $G_1 \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $q < n'$. Ainsi, en adaptant la Proposition 4.2 et le Théorème 4.13, on obtient $H * G_1(\boldsymbol{x}) = O(r^{1-n})$. Il reste à étudier la fonction définie pour tout $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$:

$$H * G_0(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} H(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\mathcal{F}\mu(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{y}|^{n-1}}d\boldsymbol{y}.$$

Effectuons le changement de variables $\boldsymbol{y} = |\,\boldsymbol{x}\,|\boldsymbol{z}$ et posons $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}/|\,\boldsymbol{x}\,|$, il vient :

$$H * G_0(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{H(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{z})}{|\boldsymbol{z}|^{n-1}}\mathcal{F}\mu(|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}.$$

Or, pour tout $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, on a trivialement :

$$\Lambda_{\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{z}) := \frac{H(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{z})}{|\boldsymbol{z}|^{n-1}} \in L^1(\mathbb{R}^n). \tag{6.5}$$

Ainsi, le théorème de Fubini montre que

$$H * G_0(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}\int_{|\,\boldsymbol{y}\,|>\gamma} \mathcal{F}\Lambda_{\boldsymbol{x}'}(|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})d\mu(\boldsymbol{y}). \tag{6.6}$$

Compte tenu du fait que pour tout $\boldsymbol{x}' \in \Sigma$, $\Lambda_{\boldsymbol{x}'} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (*cf.* (6.5)), le lemme de Riemann-Lebesgue montre que les fonctions $\mathcal{F}\Lambda_{\boldsymbol{x}'}$ tendent vers 0 à l'infini. Cette convergence est de plus uniforme par rapport à $\boldsymbol{x}'$ qui décrit la sphère Σ (On rappelle que pour toute rotation $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathcal{F}\Lambda_{\mathcal{R}\boldsymbol{x}'}(\xi) = \mathcal{F}\Lambda_{\boldsymbol{x}'}(\mathcal{R}^t\xi)$).

Ainsi, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, |\boldsymbol{x}| > R, \quad \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, |\boldsymbol{y}| > \gamma, \quad |\mathcal{F}\Lambda_{\boldsymbol{x}'}(|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})| < \varepsilon.$$

Cette majoration et (6.6) donnent le résultat puisqu'on en déduit :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, |\boldsymbol{x}| > R, \ |H * F_0(\boldsymbol{x})| \leq \frac{\| \mu \|_{\mathcal{M}_b}}{| \boldsymbol{x} |^{n-2}} \varepsilon. \quad \diamondsuit$$

Nous donnons maintenant une variante radiale du Théorème 6.1 qui fournit une autre condition d'oscillation permettant d'améliorer la décroissance de $\boldsymbol{u}$. La démonstration en est très similaire quoiqu'un peu plus technique. Elle nécessite bien sûr de passer en coordonnées sphériques dans les intégrales utilisées. La notation $\mathcal{F}$ y désigne la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$.

Théorème 6.3 *Soient $(\mu_{ij}^{\omega})_{\omega \in \Sigma}$ des mesures telles que $\mu_{ij}^{\omega} \in L^1(\Sigma, \mathcal{M}_b(\mathbb{R}))$ et*

$$\cup_{\omega \in \Sigma} \operatorname{supp} \ \mu_{ij}^{\omega} \subset \{t \in \mathbb{R}, | \, t \, | \geq \gamma\}, \gamma > 0.$$

Si l'on pose en coordonnées sphériques :

$$G_{ij}(r, \omega) = \frac{\mathcal{F}\mu_{ij}^{\omega}(r)}{r^{n-1}} \psi(r),$$

avec $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, nulle au voisinage de 0 et valant 1 au voisinage de l'infini. Alors, la solution du problème (S) donnée par (6.3) vérifie $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = o(r^{2-n})$.

Pour améliorer le comportement asymptotique de la solution donnée par (6.3), nous avons imposé des hypothèses supplémentaires à G. Nous justifions *a posteriori* leur introduction avec la

Proposition 6.4 *Il existe un tenseur G avec $\rho^{n-1}G \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tel que, étant donnée la solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ définie par (6.3), $\rho^{n-2}\boldsymbol{u}$ ne s'annule pas à l'infini.*

Preuve : Soit $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbb{R}^n)$, à support dans $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, 1 < |\boldsymbol{x}| < 2\}$ et non identiquement nul. On pose, pour tout réel $R > 0$, $\boldsymbol{\varphi}_R(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}/R)$ et

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\varphi}_{m^2}(\boldsymbol{x})}{m^{2n-4}}.$$

Les termes de la série sont deux à deux à supports disjoints, celle-ci converge donc partout et $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Il est clair que

$$\rho^{n-2}\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

De plus, comme

$$\nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nabla \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}/m^2)}{m^{2n-2}}, \tag{6.7}$$

on obtient

$$\rho^{n-1} \nabla \boldsymbol{v} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi, $(\boldsymbol{v}, 0)$ est nécessairement la solution donnée par le Théorème 6.2 du problème (S) avec $G = \nabla \boldsymbol{v}$.

Soit, en revanche, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{C}$ tel que $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0) \neq \mathbf{0}$, alors la suite $\boldsymbol{x}_m = m^2 \boldsymbol{x}_0$ tend vers l'infini mais la suite

$$\rho^{n-2}(\boldsymbol{x}_m)\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_m) = \frac{(2 + m^4 |\boldsymbol{x}_0|^2)^{\frac{n-2}{2}}}{m^{2n-4}} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} |\boldsymbol{x}_0| \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0) \neq \mathbf{0}. \quad \diamondsuit$$

Remarque 6.5 Le Théorème 6.1 (*resp.* 6.3) s'applique notamment lorsque les mesures μ_{ij} (*resp.* μ_{ij}^{ω}) sont à support dans un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$ (*resp.* $\mathbb{R}$) et sont nulles sur un voisinage (*resp.* uniforme en ω) de l'origine. C'est-à-dire lorsque $\mathcal{F}\mu_{ij}$ (*resp.* $\mathcal{F}\mu_{ij}^{\omega}$) est une fonction bornée périodique (*resp.* de période uniformément bornée en ω) et de moyenne nulle. Plus généralement, l'hypothèse de nullité des mesures au voisinage de l'origine traduit le fait que $\mathcal{F}\mu$ est une somme de contributions périodiques de taille bornée. Au contraire, il est manifeste que le tenseur $G = \nabla \boldsymbol{v}$ donné par (6.7) construit dans la Proposition 6.4 présente des structures périodiques non-bornées au voisinage de l'infini. Enfin, l'hypothèse sur les supports est à rapprocher de la condition (6.1) puisque toutes deux caractérisent des propriétés d'oscillation des données.

Remarque 6.6 On peut s'interroger sur l'introduction de la troncature ψ dans la définition de G. C'est tout d'abord une hypothèse simplificatrice qui permet d'utiliser le Théorème 6.1. On assure ainsi que la formule (6.3) a bien un sens et donne une solution du problème (S). D'autre part, on remarque que le résultat est indépendant de ψ. Ceci traduit le fait que ce sont les oscillations de G au voisinage de l'infini qui sont caractéristiques dans sa définition. C'est à dire que les conclusions des Théorèmes 6.1 et 6.3 restent valables si G est une fonction bornée quelconque sur un compact de $\mathbb{R}^n$ et est de la forme (6.2) hors de ce compact.

Annexe : A propos de l'Hypothèse (H)

Dans les sections 2 et 3, nous avons toujours travaillé sous l'hypothèse (H) :

$$n/p \notin \{1, \ldots, -l\} \text{ si } l < 0 \quad \text{et} \quad n/p' \notin \{1, \ldots, l\} \text{ si } l > 0.$$

Cette condition est nécessaire pour pouvoir utiliser les isomorphismes (2.5) et (2.6) (voir [5]). De même, sans cette condition, le Théorème 1.2 est faux.

Contre exemples : Supposons $l < 0$ et $n/p \in \{1, \ldots, -l\}$. Dans ce cas, les injections (2.2) ne sont plus vraies. En effet, comme $n/p + l$ est un entier négatif on a en fait (voir[5], p.594) :

$$\mathcal{P}_{-l-n/p} \subset W_l^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{P}_{-1-l-n/p} \subset L_l^p(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{P}_{-2-l-n/p} \subset W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Les propriétés d'unicité énoncées dans le Théorème 1.3 doivent donc être rectifiées en tenant compte de ces nouvelles inclusions.

Par ailleurs, cette modification nécessaire n'est pas suffisante pour obtenir un énoncé correct : l'existence de solutions est elle-aussi mise en défaut. Pour illustrer cette affirmation, considérons dans le cas $n/p = -l$ une matrice carrée A antisymétrique et introduisons le champ de vecteurs

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \ln^{\beta} \rho(\boldsymbol{x}) A\boldsymbol{x}, \quad \beta < 1/p'.$$

Un simple calcul montre que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \boldsymbol{v} \sim \rho^{-1} \ln^{\beta-1} \rho,$$

à l'infini. Nous en déduisons que $\Delta \boldsymbol{v} \in \mathbf{L}_{l+1}^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ (l'injection duale est continue). En revanche, $\boldsymbol{v} \notin \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, et il en va donc de même pour toute solution tempérée $(\boldsymbol{u}, \pi)$ du problème (S) avec $\boldsymbol{f} = \Delta \boldsymbol{v}$ et $g = 0$ puisque (voir remarque 3.2) :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\lambda}, \quad \pi = \mu, \quad (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in \cup_{k \geq 0} N_k.$$

Ainsi, le problème (S) considéré n'a pas de solution dans $\mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$.

En général, lorsque $l < 0$ et $n/p \in \{1, \ldots, -l\}$, on dispose de contre exemples similaires et lorsque $l > 0$ et $n/p' \in \{1, \ldots, l\}$, le Théorème 1.2 est encore faux par dualité. On peut consulter pour une étude de ces cas critiques, la thèse de J. Giroire [33] qui introduit des espaces adaptés à la résolution des problèmes de Laplace et Stokes.

Le Théorème 2.2, est lui aussi faux lorsque (H) n'est pas satisfaite (changer par exemple p' en p et $-l$ en l dans la remarque 2.6 pour obtenir un contre exemple lorsque $n/p = -l$).

En revanche, nous ne savons pas ce qu'il en est pour le Théorème de densité 2.1, excepté le fait que les démonstations utilisées sous l'hypothèse (H) ne sont plus valables.

Un résultat de régularité critique pour le laplacien Nous démontrons maintenant le résultat annoncé dans la preuve du Théorème 5.1 qui complète la famille d'isomorphismes (2.6) dans le cas $n/q' = k$.

Théorème A *Soit $l \geq 0$ un entier et p tel que $n/p' = l+1$. L'opérateur suivant est un isomorphisme :*

$$\Delta \; : \; W^{2,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[2-n]} \longrightarrow L^p_{l+1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1,p}_{l}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_0.$$

Preuve : L'espace $W^{2,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)$ est défini par (2.3) et vérifie $W^{2,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n) \subset W^{1,p}_{l}(\mathbb{R}^n)$ avec injection continue. Ainsi, au vu de l'isomorphisme (2.5) avec $q = p$ et $k = l$, l'opérateur considéré est défini et continu. Son injectivité découle d'une simple vérification. De plus, si $f \in L^p_{l+1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1,p}_{l}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_0$, il existe, grâce à l'isomorphisme (2.5) avec $q = p$ et $k = l$, une fonction $u \in W^{1,p}_{l}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Delta u = f$. Il suffit pour conclure de montrer que $\nabla^2 u \in L^p_{l+1}(\mathbb{R}^n)$. Or, il est clair que

$$\Delta(u\rho^{l+1}) = f\rho^{l+1} + 2\nabla u.\nabla\rho^{l+1} + u\Delta\rho^{l+1} \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Dans cette égalité, les termes de droite sont dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ par construction et notons que $u\rho^{l+1} \in W^{2,p}_0(\mathbb{R}^n)$. Alors, l'inégalité de Calderón-Zygmund et la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{2,p}_0(\mathbb{R}^n)$ montrent que $\nabla^2(u\rho^{l+1}) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Mais, on a aussi l'égalité :

$$\nabla^2(u\rho^{l+1}) = \rho^{l+1}\nabla^2 u + 2\nabla u \otimes \nabla\rho^{l+1} + u\nabla^2\rho^{l+1},$$

qui implique finalement que $\rho^{l+1}\nabla^2 u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, soit la propriété attendue. $\diamondsuit$

Chapitre II

Le problème extérieur de Stokes

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions à nouveau le problème de Stokes mais nous le posons maintenant dans une géométrie différente. Nous considérons un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété suivante. Il existe un ouvert borné Ω' ayant un nombre fini de composantes connexes tel que $\Omega = \mathbb{R}^n - \overline{\Omega'}$. Nous supposons aussi que Ω est connexe. Dans toute la suite, un tel ouvert sera désigné par l'appellation générique de *domaine extérieur*. Nous supposons toujours que sa frontière est de régularité lipschitzienne et nous lui associons pour une viscosité $\nu > 0$, le problème extérieur :

$$(S_{ext}) \qquad \begin{aligned} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla\pi &= \boldsymbol{f} && \text{dans } \ \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} &= g && \text{dans } \ \Omega, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{\varphi} && \text{sur } \ \partial\Omega, \end{aligned}$$

Lorsque g et $\boldsymbol{\varphi}$ sont nuls, ces équations modélisent, en dimension 2 ou 3, les écoulements stationnaires lents de fluides visqueux (de viscosité ν) et incompressibles autour d'un ou plusieurs obstacles (définis par $\overline{\Omega'}$).

Etant donné un ouvert extérieur Ω, les questions soulevées pour le problème de Stokes dans $\mathbb{R}^n$, comme l'existence de solutions satisfaisant un comportement asymptotique donné, restent intéressantes. Elles le sont d'autant plus car elles permettent d'évaluer la pertinence du modèle mathématique par rapport à des situations physiquement réalistes.

Nous travaillons à nouveau dans des espaces de Sobolev avec poids et prouvons que les propriétés obtenues dans $\mathbb{R}^n$ s'adaptent au cas d'un domaine extérieur. Ce chapitre est donc globalement construit comme le précédent. Après avoir rappelé quelques propriétés spécifiques aux espaces avec poids définis sur un domaine extérieur, nous commençons par démontrer des propriétés analogues aux Théorèmes I.2.1 et I.2.2. Nous nous intéressons ensuite au problème (S_{ext}) et prouvons le

Théorème 1.1 *Soient Ω un domaine extérieur de frontière $C^{1,1}$, $l \in \mathbb{Z}$ et p vérifiant l'hypothèse (H). Soient $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\Omega)$, $g \in L_l^p(\Omega)$ et $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1/p',p}(\partial\Omega)$, satisfaisant la condition de compatibilité :*

$$\forall(\boldsymbol{v},\eta) \in \mathcal{N}_{-l}^{p'}(\Omega), \quad < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} > + < g, \eta > + < \boldsymbol{\varphi}, (\nu\nabla\boldsymbol{v} - \eta I).\boldsymbol{n} >_{\partial\Omega} = 0. \qquad (1.1)$$

Alors, le problème (S_{ext}) a une solution $(\boldsymbol{u},\pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$ unique à un élément près de $\mathcal{N}_l^p(\Omega)$ et vérifie :

$$\inf_{(\boldsymbol{w},\tau)\in\mathcal{N}_l^p(\Omega)} (\| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}_l^{1,p}} + \| \pi + \tau \|_{L_l^p}) \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} + \| g \|_{L_l^p} + \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1/p',p}}),$$

où $C > 0$ ne dépend que de Ω, p, n, ν et l.

Ici, $\mathcal{N}_l^p(\Omega)$ désigne l'espace

$$\mathcal{N}_l^p(\Omega) = \{(\boldsymbol{u},\pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega), -\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \mathbf{0}, \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \ \boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0}\}, \quad (1.2)$$

que nous caractérisons précisément plus loin (voir Théorèmes 3.1 et 3.5). Pour éclaircir l'énoncé précédent, signalons dès à présent que

$$\mathcal{N}_l^p(\Omega) = \{(\mathbf{0},0)\} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} n/p + l > 1 & \text{si } n \geq 3, \\ 2/p + l \geq 1 & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

Nous étudions ensuite les propriétés de régularité des solutions obtenues. Ceci nous permet d'améliorer une estimation *a priori* pour les solutions $(\boldsymbol{u},\pi)$ avec $\nabla^2\boldsymbol{u} \in L^p(\Omega)$. Nous refermons le chapitre avec des développements asymptotiques des solutions lorsque les conditions de compatibilité (1.1) ne sont pas satisfaites. Comme dans le chapitre précédent, ceux-ci sont obtenus pour des données à support quelconque et peu régulières.

Rappelons, avant d'entrer dans le vif du sujet, que le problème de Stokes extérieur a déjà suscité de nombreux travaux. L'existence et l'unicité de solutions avec $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ ont été étudiées dans les espaces :

$$\hat{H}_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\| \nabla \ \|_{L^p(\Omega)}},$$

par H. Kozono et H. Sohr dans [39] et [41]. Une approche similaire est développée par G.P. Galdi et C.G. Simader dans [27]. Dans [69], W. Varnhorn, quant à lui, construit des solutions plus régulières dans des espaces homogènes d'ordre 2. Plus récemment, G.P. Galdi et C.G. Simader [28] démontrent, en dimension $n \geq 3$, l'existence et l'unicité d'une solution $(\boldsymbol{u},\pi)$ telle que $\rho^{n-2}\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ et $\pi \in L^q(\Omega), \ q > n'$ lorsque

$$\boldsymbol{f} = \operatorname{div} F, \ \rho^{n-1}F \in L^\infty(\Omega), \quad g = 0, \ \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}.$$

Par ailleurs, le problème (S_{ext}) a aussi été étudié dans des espaces de Sobolev avec poids par A. Sequeira et V. Girault [32] pour $p = 2$ et $l = 0$ en dimension 2 et 3.

Dans [61] pour $n \geq 3$ et [63] en dimension 2, M. Specovius-Neugebauer prouve des résultats pour p quelconque. Notre approche permet une genéralisation de ces résultats, notamment grâce à l'utilisation des poids logarithmiques. Citons enfin [6, 56, 68] qui étudient l'équation de Poisson dans des domaines extérieurs avec des espaces avec poids.

2 Espaces avec poids, gradient et divergence

L'espace $W^{1,p}_\alpha(\Omega)$ (*resp.* $L^p_\alpha(\Omega)$) désigne l'ensemble des restrictions de fonctions de $W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ (*resp.* $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$) au domaine extérieur Ω. Nous utilisons de plus les normes

$$\| u \|_{W^{1,p}_\alpha(\Omega)} = (\| \rho^{\alpha-1} u \|^p_{L^p(\Omega)} + \| \rho^\alpha \nabla u \|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)})^{1/p} \quad \text{si } n/p + \alpha \neq 1,$$

$$\| u \|_{W^{1,p}_\alpha(\Omega)} = (\| \frac{\rho^{\alpha-1}}{\ln \rho} u \|^p_{L^p(\Omega)} + \| \rho^\alpha \nabla u \|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)})^{1/p} \quad \text{si } n/p + \alpha = 1,$$

$$\| u \|_{L^p_\alpha(\Omega)} = \| \rho^\alpha u \|_{L^p(\Omega)},$$

de sorte que les espaces considérés sont complets et réflexifs.

Nous introduisons en outre l'espace $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\alpha}(\Omega)$, défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\| \,.\, \|_{W^{1,p}_\alpha(\Omega)}$ ainsi que son dual $W^{-1,p'}_{-\alpha}(\Omega)$ qui est un espace de distributions. On a alors l'analogue du Théorème I.1.1 :

Théorème 2.1 (Amrouche-Girault-Giroire [6]) *Soit Ω un domaine extérieur lipschitzien. Pour tout α, il existe une constante $C = C(n, p, \alpha, \Omega) > 0$, telle que*

$$\forall u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\alpha}(\Omega), \quad \| u \|_{W^{1,p}_\alpha(\Omega)} \leq C \, \| \nabla u \|_{\mathbf{L}^p_\alpha(\Omega)}.$$

Dans toute la suite, nous supposerons que l'origine de $\mathbb{R}^n$ est dans Ω'. Nous notons de plus R_0 un réel strictement positif tel que Ω' est inclus dans la boule ouverte B_{R_0} de rayon R_0 centrée à l'origine. Nous posons $\Omega_{R_0} = \Omega \cap B_{R_0}$ et $\Omega^{R_0} = \Omega - \overline{\Omega_{R_0}}$.

2.1 Traces et relèvements

Par définition, la frontière d'un domaine extérieur est bornée. Si elle est de plus lipschitzienne, il existe γ, un opérateur de trace sur le bord, continu de $W^{1,p}_\alpha(\Omega)$ dans $W^{1/p',p}(\partial\Omega)$ comme pour un domaine borné. Cet opérateur est de plus surjectif comme le montre la

Proposition 2.2 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine extérieur lipschitzien et $\varphi \in W^{1/p',p}(\partial\Omega)$. Il existe $u \in W^{1,p}_\alpha(\Omega)$, pour tout réel α, à support compact dans $\overline{\Omega}$ et $C = C(n, p, \Omega) > 0$ tels que :*

$$\gamma u = \varphi \quad \textit{et} \quad \| u \|_{W^{1,p}_\alpha(\Omega)} \leq C^\alpha \| \varphi \|_{W^{1/p',p}(\partial\Omega)}.$$

Preuve : L'ouvert Ω_{R_0} étant borné lipschtzien, il est connu (voir par exemple P. Grisvard, [34], p. 36) que la fonction $\tilde{\varphi}$ nulle sur ∂B_{R_0} et égale à φ sur $\partial\Omega$ admet un relèvement $\tilde{u} \in W^{1,p}(\Omega_{R_0})$ avec

$$\| \tilde{u} \|_{W^{1,p}(\Omega_{R_0})} \leq C \| \varphi \|_{W^{1/p',p}(\partial\Omega)}.$$

On conclut directement en posant $u = \tilde{u}$ dans Ω_{R_0} et $u = 0$ en dehors de B_{R_0}. $\diamondsuit$

Grâce à un raisonnement standard, on peut alors établir l'égalité

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\alpha}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}_{\alpha}(\Omega), \gamma v = 0\}. \tag{2.1}$$

2.2 Gradient et divergence

Nous intoduisons maintenant pour $l \in \mathbb{Z}$ les espaces

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega),\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}, \qquad \overset{\circ}{\mathbf{V}}{}^{1,p}_{l}(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^{1,p}_{l}(\Omega), \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\},$$

et nous prouvons le

Théorème 2.3 *Soient Ω un domaine extérieur lipschitzien, $l \in \mathbb{Z}$ et p vérifiant (H). Si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}_{l}(\Omega)$ et*

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega), \quad <\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}> = 0,$$

alors, il existe $g \in L^p_l(\Omega)$, unique à une constante près, telle que $\nabla g = \boldsymbol{f}$.

Preuve : D'après le Théorème I.2.3 (de Rham), il existe $h \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\nabla h = \boldsymbol{f}$. De plus, h appartient à $L^p_{loc}(\overline{\Omega})$ (voir [4], th. 2.8). Introduisons alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\psi(\boldsymbol{x}) = 1 \ \text{ si } \ |\boldsymbol{x}| > 2R_0 \ \text{ et } \ \psi(\boldsymbol{x}) = 0 \ \text{ si } \ \boldsymbol{x} \in B_{R_0}.$$

La fonction $h\psi$ prolongée par 0 en dehors de Ω appartient à $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. En notant toujours $h\psi$ la fonction prolongée, il est clair que

$$\nabla(h\psi) = \boldsymbol{f}\psi + h\nabla\psi \ \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

On vérifie facilement que $\boldsymbol{f}\psi \in \mathbf{W}^{-1,p}_{l}(\mathbb{R}^n)$ et il en est de même pour $h\nabla\psi$ car $\nabla\psi$ est à support compact dans Ω. Ainsi, le Théorème I.2.2 montre l'existence d'une constante k telle que $h\psi + k \in L^p_l(\mathbb{R}^n)$. La fonction $h + k$ résout alors le problème. $\diamondsuit$

La démonstration de la Proposition I.2.4 s'adapte alors immédiatement au

Théorème 2.4 *Si $l \in \mathbb{Z}$ et p vérifie (H), alors $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ est dense dans $\overset{\circ}{\mathbf{V}}{}^{1,p}_{l}(\Omega)$.*

3 Existence et unicité pour le problème (S_{ext})

Nous allons maintenant démontrer le Théorème 1.1. Toutefois, avant de prouver l'existence de solutions dans les espaces avec poids, nous caractérisons précisément les noyaux définis par (1.2) (dimension, comportement asymptotique des éléments...).

3.1 Caractérisation des noyaux $\mathcal{N}_l^p(\Omega)$

Nous abordons en premier lieu le cas de la dimension $n \geq 3$. Alors, les éléments du noyau $\mathcal{N}_l^p(\Omega)$ donné par (1.2) ressemblent à ceux du noyau $N_{[1-n/p-l]}$ dans $\mathbb{R}^n$ (soit des fonctions polynomiales, voir section I.3.1) à un terme correctif près assurant la nullité sur $\partial\Omega$. Le cas bidimensionnel nécessite des arguments spécifiques que nous détaillons ultérieurement.

Théorème 3.1 *Soient Ω un domaine extérieur de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ de frontière $C^{1,1}$, l un entier et p satisfaisant (H). Alors,*

$$\mathcal{N}_l^p(\Omega) = \{ (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda}, \eta(\boldsymbol{\lambda}) - \mu), \quad (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in N_{[1-n/p-l]} \},$$

où $(v(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda}))$ est l'unique solution dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ du problème extérieur :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \nabla\eta = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{v}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{\lambda}. \tag{3.1}$$

En particulier, $\mathcal{N}_l^p(\Omega) = \{(\mathbf{0}, 0)\}$ si $n/p + l > 1$.

Dans cette caractérisation, l'existence et l'unicité de $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda}))$ dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, sont assurées par le résultat suivant établi par A. Sequeira et V. Girault (voir [32], Th. 3.4 et remarque 3.4).

Théorème 3.2 (Girault-Sequeira [32]) *Soit Ω un domaine extérieur lipschitzien de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et soient $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$ et $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$. Alors, le problème (S_{ext}) a une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, avec de plus l'estimation:*

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)} + \| \pi \|_{L^2(\Omega)} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)} + \| g \|_{L^2(\Omega)} + \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{H}^{1/2,2}(\partial\Omega)}),$$

où $C > 0$ ne dépend que de ν, n et Ω.

Preuve du Théorème 3.1 : L'égalité des espaces est établie par double inclusion. Pour chaque inclusion, une formule de représentation des solutions donne leur régularité à l'infini. Puis, un argument de régularité au voisinage du bord $\partial\Omega$ permet de conclure.

i) Soit un couple $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathcal{N}_l^p(\Omega)$ que l'on prolonge par zéro dans Ω'. Un raisonnement standard montre que les fonctions prolongées toujours notées $\boldsymbol{u}$ et π vérifient:

$$(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n) \;\text{ et }\; -\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{h}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \;\text{ dans }\; \mathbb{R}^n,$$

où, par construction, $\boldsymbol{h} \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ est à support dans $\partial\Omega$. Nous déduisons alors du Théorème I.4.11 et de la Remarque I.3.2, la formule de représentation :

$$\boldsymbol{u} = U * \boldsymbol{h} - \boldsymbol{\lambda}, \quad \pi = \mathbf{Q} * \boldsymbol{h} - \mu, \quad (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in \cup_{k \geq 0} N_k, \tag{3.2}$$

$$\text{avec} \quad U * \boldsymbol{h} = O(r^{2-n}), \quad \nabla(U * \boldsymbol{h}) = O(r^{1-n}), \quad \mathbf{Q} * \boldsymbol{h} = O(r^{1-n}). \tag{3.3}$$

D'une part, on a donc à la fois $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (*resp.* $\pi \in L_l^p(\mathbb{R}^n)$) et $\boldsymbol{u} \sim -\boldsymbol{\lambda}$ à l'infini (*resp.* $\pi \sim -\mu$). On en déduit, avec les injections ($I.2.2$), que dans la représentation (3.2)

$$(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in N_{[1-l-n/p]}.$$

D'autre part, quitte à choisir R_0 grand, (3.3) entraîne trivialement :

$$(U * \boldsymbol{h}, \mathbf{Q} * \boldsymbol{h}) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega^{R_0}) \times L^2(\Omega^{R_0}). \tag{3.4}$$

Posons $(\boldsymbol{w}, \tau) = (U * \boldsymbol{h}, \mathbf{Q} * \boldsymbol{h})_{|\Omega_{R_0}}$. Alors, d'après (3.2), on a

$$(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega_{R_0}) \times L^p(\Omega_{R_0}),$$

$$-\nu\Delta\boldsymbol{w} + \nabla\tau = \mathbf{0}, \ \ \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \ \text{ dans } \Omega_{R_0}, \quad \boldsymbol{w}_{|\partial B_{R_0}} = U * \boldsymbol{h}, \ \ \boldsymbol{w}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{\lambda}.$$

Mais, le Théorème I.4.11 établit que $U * \boldsymbol{h}$ est C^∞ sur ∂B_{R_0}. Nous en déduisons que

$$(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{H}^1(\Omega_{R_0}) \times L^2(\Omega_{R_0}), \tag{3.5}$$

avec un argument de régularité standard fondé sur le résultat suivant ([4], pp. 134-136).

Théorème 3.3 (Amrouche-Girault [4]) *Soit $\mathcal{O}$ un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, de frontière $C^{1,1}$. Si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{-1,q}(\mathcal{O}), g \in L^q(\mathcal{O})$ et $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1/q',q}(\partial\mathcal{O})$ avec $1 < q < +\infty$ vérifient la condition de compatibilité : $\int_{\mathcal{O}} g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\mathcal{O}} \boldsymbol{\varphi}.\boldsymbol{n}ds = 0$, alors, le problème de Stokes*

$$-\nu\Delta\boldsymbol{w} + \nabla\tau = \boldsymbol{f}, \ \ \operatorname{div} \boldsymbol{w} = g \ \ \textit{dans } \mathcal{O}, \ \ \boldsymbol{w}_{|\partial\mathcal{O}} = \boldsymbol{\varphi},$$

admet une unique solution dans $\mathbf{W}^{1,q}(\mathcal{O}) \times L^q(\mathcal{O})$ avec $\int_{\mathcal{O}} \tau d\boldsymbol{x} = 0$.

Avec (3.4) et (3.5), on a établi que $(U * \boldsymbol{h}, \mathbf{Q} * \boldsymbol{h})_{|\Omega} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Ce couple vérifie de plus les équations (3.1) d'après (3.2). Il coïncide donc avec $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda}))$.

ii) L'inclusion réciproque est évidente si $n/p + l > 1$ car alors $N_{[1-n/p-l]} = \{(\mathbf{0}, 0)\}$. Nous supposons donc $n/p + l \leq 1$ et considérons $(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in N_{[1-n/p-l]}$. Grâce à l'inclusion $N_{[1-n/p-l]} \subset \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$, il suffit d'établir que $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda})) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$. Posons pour cela

$$(\tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\eta}) = (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda})) \text{ dans } \Omega, \quad (\tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\eta}) = (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \text{ dans } \Omega'.$$

Alors, on vérifie facilement que

$$(\tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\eta}) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad -\nu\Delta\tilde{\boldsymbol{v}} + \nabla\tilde{\eta} = \boldsymbol{h}, \quad \operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{v}} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n,$$

où $\boldsymbol{h} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^n)$ est à support dans $\partial\Omega$. Comme $n/2 > 1$, le Théorème I.4.4 montre que $\tilde{\boldsymbol{v}} = U * \boldsymbol{h}$ et $\tilde{\eta} = \mathbf{Q} * \boldsymbol{h}$. Grâce à ces égalités, on déduit du Théorème I.4.11 qu'au voisinage de l'infini :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) = O(r^{2-n}), \;\; \nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) = O(r^{1-n}), \;\; \pi(\boldsymbol{\lambda}) = O(r^{1-n}). \tag{3.6}$$

Par conséquent, comme $n/p + l \leq 1$, on a $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda})) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega^{R_0}) \times L_l^p(\Omega^{R_0})$ pour R_0 assez grand. Alors, de même qu'au (i), on déduit du Théorème 3.3 et de (3.1) que $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda})) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega_{R_0}) \times L^p(\Omega_{R_0})$. $\diamondsuit$

Corollaire 3.4 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1,*

$$\dim \mathcal{N}_l^p(\Omega) = \dim N_{[1-l-n/p]}.$$

Preuve : Introduisons l'application définie de $N_{[1-l-n/p]}$ dans $\mathcal{N}_l^p(\Omega)$:

$$(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \mapsto (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda}, \eta(\boldsymbol{\lambda}) - \mu).$$

Celle-ci est linéaire car $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda}))$ est déterminé de manière unique par (3.1) grâce au Théorème 3.2. Elle est bien sûr surjective grâce au Théorème 3.1. De plus, (3.6) montre que $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda})$ et $\pi(\boldsymbol{\lambda})$ s'annulent à l'infini, ce qui entraine facilement l'injectivité de l'application, d'où le résultat. $\diamondsuit$

Nous passons maintenant à la dimension 2, dont la spécificité repose sur deux faits. D'une part, l'espace $W_0^{1,2}(\Omega)$ contient les fonctions constantes, ce qui n'était pas le cas pour $n \geq 3$. D'autre part, la solution élémentaire U se comporte à l'infini comme $\ln r$ et n'appartient donc pas à $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Théorème 3.5 *Soient Ω un domaine extérieur de $\mathbb{R}^2$, de frontière $C^{1,1}$, un entier l et p satisfaisant l'hypothèse (H). Si de plus $2/p + l \neq 1$,*

$$\mathcal{N}_l^p(\Omega) = \{ (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}) - U\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}), \;\; \eta(\boldsymbol{\lambda}) - \mu - \mathbf{Q}.\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0})), \quad (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in N_{[1-2/p-l]} \},$$

où $(v(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda}))$ est l'unique solution dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ du problème extérieur :

$$-\nu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla\eta = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{v}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}) + U\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}). \tag{3.7}$$

Cependant, si $2/p + l = 1$, alors $\mathcal{N}_l^p(\Omega) = \{(\mathbf{0}, 0)\}$.

Preuve : On raisonne encore par double inclusion. D'autre part, l'égalité $2/p + l = 1$ n'a en fait lieu que si $p = 2$ et $l = 0$, cas traité par le Théorème 3.2. Nous supposons donc à partir d'ici que $2/p + l \neq 1$.

i) Soit $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathcal{N}_l^p(\Omega)$. On établit d'abord comme au Théorème 3.1 la représentation (3.2). Au voisinage de l'infini, le Théorème I.4.11 donne alors :

$$U * \boldsymbol{h} = U m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{h}) + O(r^{-1}), \quad \nabla(U * \boldsymbol{h}) = \nabla(U m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{h})) + O(r^{-2}), \tag{3.8}$$

$$\mathbf{Q} * \boldsymbol{h} = \mathbf{Q}.m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{h}) + O(r^{-2}). \tag{3.9}$$

On obtient avec (3.2) les équivalents de $\boldsymbol{u}$ et π à l'infini. Ainsi, comme par hypothèse $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$, on en déduit que $(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in N_{[1-2/p-l]}$ et de plus que $m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{h}) = \mathbf{0}$ si $2/p + l > 1$ (car $U \sim \ln r$). Posons maintenant

$$\boldsymbol{v_h} := U * \boldsymbol{h} - U m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{h}), \quad \eta_{\boldsymbol{h}} := \mathbf{Q} * \boldsymbol{h} - \mathbf{Q}.m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{h}).$$

D'après (3.8) et (3.9), on a au voisinage de l'infini

$$\boldsymbol{v_h} = O(r^{-1}), \ \nabla \boldsymbol{v_h} = O(r^{-2}), \ \eta_{\boldsymbol{h}} = O(r^{-2}), \tag{3.10}$$

de sorte que $(\boldsymbol{v_h}, \eta_{\boldsymbol{h}}) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega^{R_0}) \times L^2(\Omega^{R_0})$ pour R_0 assez grand. De plus, grâce à (3.2), $(\boldsymbol{v_h}, \eta_{\boldsymbol{h}})$ satisfait :

$$-\nu \Delta \boldsymbol{v_h} + \nabla \eta = \mathbf{0}, \ \operatorname{div} \boldsymbol{v_h} = 0 \ \text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{v_h}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{\lambda} - U m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{h}). \tag{3.11}$$

Comme au Théorème 3.1, on montre alors que $(\boldsymbol{v_h}, \eta_{\boldsymbol{h}})_{|\Omega_{R_0}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_{R_0}) \times L^2(\Omega_{R_0})$. Collectant ces informations, (3.2) se reécrit donc dans Ω :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_h} - \boldsymbol{\lambda} + U m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{h}), \quad \pi = \eta_{\boldsymbol{h}} - \mu + \mathbf{Q}.m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{h}), \tag{3.12}$$

où $(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in N_{[1-2/p-l]}$ et $(\boldsymbol{v_h}, \eta_{\boldsymbol{h}})$ est la solution dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ de (3.11).

Remarquons finalement que dans (3.12), $\boldsymbol{u}$ et π ne dépendent pas du terme constant de $\boldsymbol{\lambda}$. En effet, l'unique solution dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ du problème

$$-\nu \Delta \boldsymbol{w} + \nabla \tau = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0, \quad \boldsymbol{w}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}),$$

est le couple $(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}), 0)$. Ajouter à $\boldsymbol{\lambda}$ un terme constant revient donc à ajouter le même terme à $\boldsymbol{v}$, opération qui laisse $\boldsymbol{u}$ inchangé dans (3.12). Posons alors $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}) = -m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{h})$ et remplaçons $\boldsymbol{\lambda}$ par $\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0})$ dans (3.12). Ceci donne la représentation attendue pour $(\boldsymbol{u}, \pi)$ et établit de plus que $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda})) = (\boldsymbol{v_h}, \eta_{\boldsymbol{h}})$.

ii) L'inclusion réciproque est triviale si $2/p + l > 1$. Si $2/p + l < 1$, nous considérons $(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in N_{[1-2/p-l]}$ et introduisons le couple $(\tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\eta}) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ donné par :

$$(\tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\eta}) = (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda})) \text{ dans } \Omega, \quad (\tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\eta}) = (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}) + U\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0})\psi, \mu) \text{ dans } \Omega',$$

où $\psi \in C^\infty$ est nulle près de l'origine et vaut 1 près de $\partial\Omega$ (*i.e.* on a tronqué la singularité de U à l'origine). Comme $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda}))$ vérifie (3.7), il vient

$$-\Delta \tilde{\boldsymbol{v}} + \nabla \tilde{\eta} = \boldsymbol{h}, \quad \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{v}} = g \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^n,$$

où $\boldsymbol{h} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^2)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ sont à support dans $\overline{\Omega'}$. Le Théorème I.4.11 et la Remarque I.3.2 montrent que

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = U * \boldsymbol{h} + F * \nabla g - \boldsymbol{\lambda}_0, \quad \tilde{\eta} = \mathbf{Q} * (\boldsymbol{h} - \nu \nabla g) - \mu_0, \quad (\boldsymbol{\lambda}_0, \mu_0) \in \cup_{k \geq 0} N_k. \tag{3.13}$$

Comme g est à support compact, on a $m_{\mathbf{0}}(\nabla g) = \mathbf{0}$. De plus, $m_0(\boldsymbol{h}) = \mathbf{0}$ d'après la Proposition I.3.3 ($p = n = 2$, $l = 0$). Ainsi, le Théorème I.4.11 donne

$$U * \boldsymbol{h} + F * \nabla g = O(r^{-1}), \quad \nabla(U * \boldsymbol{h} + F * \nabla g) = O(r^{-2}), \tag{3.14}$$

$$\mathbf{Q} * (\boldsymbol{h} - \nu \nabla g) = O(r^{-2}). \tag{3.15}$$

Or, $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ contient seulement $\mathcal{P}_0$ et $L^2(\mathbb{R}^2)$ aucun polynôme. En raisonnant alors sur les équivalents à l'infini, on obtient que (3.13) s'écrit en fait :

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = U * \boldsymbol{h} + F * \nabla g + \mathbf{c}, \ \mathbf{c} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_0, \quad \tilde{\eta} = \mathbf{Q} * (\boldsymbol{h} - \nu \nabla g). \tag{3.16}$$

Alors, (3.14), (3.15) et (3.16) entrainent que

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) = O(1), \ \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) = O(r^{-2}), \ \eta(\boldsymbol{\lambda}) = O(r^{-2}),$$

et que $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega^{R_0})$ et $\eta(\boldsymbol{\lambda}) \in L_l^p(\Omega^{R_0})$ pour R_0 assez grand, car $2/p + l < 1$. Finalement, on obtient, grâce au Théorème 3.3, la régularité de ces fonctions dans Ω_{R_0}, de sorte que $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda})) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$. $\diamondsuit$

Corollaire 3.6 *Sous les hypothèses du Théorème 3.5,*

$$\dim \mathcal{N}_l^p(\Omega) = \dim N_{[1-2/p-l]} \quad si \ \ 2/p + l \neq 1.$$

Preuve : Considérons, si $2/p + l \neq 1$, l'application de $N_{[1-2/p-l]}$ dans $\mathcal{N}_l^p(\Omega)$:

$$(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \mapsto (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}) - U\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}), \ \ \eta(\boldsymbol{\lambda}) - \mu - \mathbf{Q}.\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0})),$$

qui est surjective d'après le Théorème 3.5. Comme dans le Corollaire 3.4, on établit qu'elle est linéaire. De plus, la démonstration précédente (i) montre que $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda}))$ n'est autre que le couple $(v_{\boldsymbol{h}}, \eta_{\boldsymbol{h}})$ qui vérifie (3.10). On en déduit alors l'injectivité de l'application et donc l'égalité des dimensions.

Si $2/p + l = 1$, *i.e.* $p = 2$ et $l = 0$, alors $\mathcal{N}_0^2(\Omega)$ est réduit à l'élément nul (*cf.* Théorème 3.2), tandis que $\dim N_0 = 2$. $\diamondsuit$

Dans les Théorèmes 3.1 et 3.5, il est important de noter que si $n/p + l = n/q + k$ alors $\mathcal{N}_l^p(\Omega) = \mathcal{N}_k^q(\Omega)$. C'est à dire que les noyaux sont caractérisés uniquement par les propriétés asymptotiques des espaces considérés, et sont indépendants des questions de régularité locale.

Application au Paradoxe de Stokes : C.G. Stokes a, le premier, remarqué que le problème (S_{ext}) n'est pas un modèle adapté à la description d'écoulements fluides bidimensionnels. Lorsque Ω est le complémentaire d'un disque et étant donné un vecteur constant $\boldsymbol{u}_\infty \neq \mathbf{0}$, il établit qu'il n'existe pas de solution classique $(\boldsymbol{u}, \pi)$ au problème (S_{ext}) avec des données nulles qui vérifie

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to +\infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_\infty.$$

Cette propriété, communément dénommée *Paradoxe de Stokes*, a été généralisée par plusieurs auteurs (J.G. Heywood [37], I-Dee Chang[15] ou G.P. Galdi[26] Ch. V, Th.3.5). Nous donnons ici une autre version du paradoxe généralisé.

Corollaire 3.7 (Paradoxe de Stokes généralisé) *Soient Ω un domaine extérieur de $\mathbb{R}^2$, de frontière $C^{1,1}$. Soient*

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{1,p}_{loc}(\overline{\Omega}), \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = o(\ln r), \quad \pi \in L^p_{loc}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{S}'(\Omega), \tag{3.17}$$

tels que

$$-\nu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla \pi = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad dans\ \Omega, \quad \boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0}. \tag{3.18}$$

Alors, $\boldsymbol{u}$ est identiquement nulle sur Ω.

Preuve : Soit $(\boldsymbol{u}, \pi)$ vérifiant (3.17) et (3.18). Alors, π est tempérée par hypothèse. Il en est de même pour $\boldsymbol{u}$ car sa croissance est dominée par $\ln r$. Ainsi, comme au Théorème 3.5 (i), on obtient par prolongement la formule de représentation (3.2) où $\boldsymbol{h} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ est à support dans $\partial\Omega$ ainsi que les propriétés (3.8) et (3.9). Mais, le raisonnement par équivalents et l'hypothèse $\boldsymbol{u} = o(\ln r)$ entraînent d'une part que $\boldsymbol{\lambda}$ est nécessairement constant et d'autre part que $m_0(\boldsymbol{h}) = \mathbf{0}$. En particulier, $\Delta\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ et donc $\nabla\mu = \mathbf{0}$, de sorte μ est aussi constant.

Alors (3.2), (3.8) et (3.9) montrent qu'à l'infini

$$\boldsymbol{u} = O(1), \quad \nabla \boldsymbol{u} = O(r^{-2}), \quad \pi = O(1). \tag{3.19}$$

Soit l tel que $2/p + l \leq 0$. De (3.19) et de l'hypothèse de régularité locale, on déduit trivialement $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$. Compte tenu de (3.18), on a donc

$$(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathcal{N}_l^p(\Omega).$$

Si $p \neq 2$, alors l vérifie nécéssairement l'hypothèse (H) et donc

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}) - U\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0})$$

grâce au Théorème 3.5. Or, nous avons vu que $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda})$ s'annule à l'infini. La condition $u(\boldsymbol{x}) = o(\ln r)$ implique alors que $\boldsymbol{\lambda}$ soit le polynôme nul, soit la conclusion. Si $p = 2$, on se ramène au cas précédent puisque $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,q}_{loc}(\overline{\Omega}) \times L^q_{loc}(\overline{\Omega})$ pour tout q avec $1 < q < 2$. $\diamondsuit$

3.2 Existence dans les espaces avec poids

Nous démontrons ici les propriétés d'existence énoncées dans le Théorème 1.1. Lorsque $n/p' - l > 1$, la condition (1.1) est vide d'après les Théorèmes 3.1 et 3.5, et nous commençons par établir la

Proposition 3.8 *Soient Ω un domaine extérieur de frontière $C^{1,1}$, l un entier et p vérifiant (H). Si $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$ et $n/p' - l > 1$, alors le problème :*

$$-\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla\pi = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \textit{dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}, \tag{3.20}$$

admet une solution dans $\mathbf{W}^{1,p}_l(\Omega) \times L^p_l(\Omega)$.

Preuve : Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans Ω_{R_0} et telle que

$$\int_{\Omega_{R_0}} \psi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi}.\boldsymbol{n} ds = 0.$$

D'après le Théorème 3.3, il existe $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega_{R_0}) \times L^p(\Omega_{R_0})$ tel que :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \nabla\eta = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \psi \quad \text{dans } \Omega_{R_0}, \quad \boldsymbol{v}_{|\partial B_{R_0}} = \mathbf{0}, \ \boldsymbol{v}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}.$$

Il est connu qu'une telle solution est C^∞ dans Ω_{R_0}. Un argument standard de régularité jusqu'au bord, basé sur le Théorème 3.3, montre alors que :

$$\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}^{1,q}_{loc}(\Omega_{R_0} \cup \partial B_{R_0}), \quad \pi \in L^q_{loc}(\Omega_{R_0} \cup \partial B_{R_0}), \quad \forall 1 < q < +\infty. \tag{3.21}$$

Ainsi, les fonctions $\boldsymbol{v}$ et η prolongées par zéro dans Ω^{R_0} appartiennent à $\mathbf{W}^{1,p}_l(\Omega)$ et $L^p_l(\Omega)$ et vérifient

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \nabla\eta = \boldsymbol{h}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \psi \quad \text{dans } \Omega, \quad \boldsymbol{v}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi},$$

avec $\boldsymbol{h} \in \mathbf{W}^{-1,q}_0(\Omega)$ pour tout $1 < q < +\infty$ et à support dans ∂B_{R_0}. Le Théorème 3.2 fournit alors une solution $(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}^{1,2}_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ au problème :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{w} + \nabla\tau = -\boldsymbol{h}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{w} = -\psi, \quad \boldsymbol{w}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0}.$$

Si nous démontrons de plus que $(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$ alors le couple

$$(\boldsymbol{u}, \pi) = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \eta + \tau),$$

vérifie clairement les propriétés requises. Nous etablissons alors le résultat de régularité suivant :

Lemme 3.9 *Soit Ω un domaine extérieur de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et de frontière $C^{1,1}$. Etant données $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ à supports compacts dans Ω, la solution dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ du problème :*

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = g, \quad \boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0},$$

appartient à $\mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$ pour tout entier l tel que $n/p' - l > 1$.

Preuve : La démonstration de ce résultat utilise la technique de représentation mise en oeuvre pour prouver les Théorèmes 3.1 et 3.5. Nous en rappelons seulement les étapes principales. Prolongeons la solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ donnée par le Théorème 3.2, par zéro en dehors de Ω. Elle vérifie alors :

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = g \quad \text{dans } \mathbb{R}^n,$$

où $\boldsymbol{h} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^n)$ est à support dans $\partial\Omega$ et $m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}) = \mathbf{0}$ si $n = 2$ (*cf.* Proposition I.3.3). Grâce au raisonnement par équivalents, il n'est pas difficile d'établir la formule de représentation :

$$\boldsymbol{u} = U * (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}) + F * \nabla g + \mathbf{c}, \quad \pi = \mathbf{Q} * (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{h} - \nu\nabla g),$$

avec $\mathbf{c} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_0$ et $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ si $n \geq 3$ ($W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ contient $\mathcal{P}_0$ ssi $n = 2$). Par conséquent, avec le Théorème I.4.11, on a au voisinage de l'infini :

$$\boldsymbol{u} = O(r^{2-n}), \quad \nabla\boldsymbol{u} = O(r^{1-n}), \quad \pi = O(r^{1-n}), \quad \text{si } n \geq 3, \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{u} = O(1), \quad \nabla\boldsymbol{u} = O(r^{-2}), \quad \pi = O(r^{-2}), \qquad \text{si } n = 2. \tag{3.23}$$

Fixons R_0 assez grand. Puisque $n/p' - l > 1$, (3.22) si $n \geq 3$ ou (3.23) si $n = 2$ montrent que $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega^{R_0}) \times L_l^p(\Omega^{R_0})$. La régularité dans Ω_{R_0} s'obtient alors avec le Théorème 3.3. $\diamondsuit$

La Proposition 3.8 est ainsi démontrée.

Lorsque $\boldsymbol{f}$ et g ne sont plus nulles, nous construisons une solution à partir de deux problèmes auxiliaires. Le premier est un problème prolongé à $\mathbb{R}^n$ (on considère l'écoulement engendré par $\boldsymbol{f}$ et g en ayant virtuellement enlevé l'obstacle Ω'). Le second est un problème extérieur de type (3.20) qui décrit la réaction de l'obstacle dans l'écoulement virtuel obtenu auparavant.

Théorème 3.10 *Soient Ω un domaine extérieur de frontière $C^{1,1}$, $l \in \mathbb{Z}$ et p vérifiant (H) ainsi que $n/p' - l > 1$. Si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\Omega)$, $g \in L_l^p(\Omega)$, et $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$, alors le problème ($S_{ext}$) a une solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ dans $\mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$. Elle est unique à un élément de $\mathcal{N}_l^p(\Omega)$ près et satisfait*

$$\inf_{(\boldsymbol{v},\eta)\in\mathcal{N}_l^p(\Omega)} (\| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \|_{\mathbf{W}_l^{1,p}} + \| \pi + \eta \|_{L_l^p}) \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} + \| g \|_{L_l^p} + \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1/p',p}}),$$

où $C > 0$ ne dépend que de Ω, p, n, ν et l.

Preuve : Nous prouvons séparément l'existence de solution et l'estimation.

i) existence : Le Théorème 2.1 entraine par dualité que $\boldsymbol{f} = \operatorname{div} H$ où $H \in L_l^p(\Omega)$ est un tenseur d'ordre 2. Prolongeons H et g par zéro dans Ω'. Notons $\tilde{H}$ et $\tilde{g}$ les fonctions prolongées et posons de plus $\tilde{\boldsymbol{f}} = \operatorname{div} \tilde{H}$ dans $\mathbb{R}^n$. Par construction,

$$(\tilde{\boldsymbol{f}}, \tilde{g}) \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$$

et il existe ($cf.$ Théorème I.1.2) $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \nabla\eta = \tilde{\boldsymbol{f}}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \tilde{g} \;\text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

La trace $\gamma\boldsymbol{v}$ de $\boldsymbol{v}$ sur $\partial\Omega$ appartient en particulier à $\mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$. Par conséquent, il existe, d'après la Proposition 3.8, un couple $(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$ vérifiant :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{w} + \nabla\tau = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \;\text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{w}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi} - \gamma\boldsymbol{v}.$$

Ainsi, $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \eta + \tau)$ résout (S_{ext}) dans $\mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$.

ii) estimation : L'opérateur :

$$\begin{aligned}(T, \gamma) \;\; &: (\mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega))/\mathcal{N}_l^p(\Omega) \longrightarrow \mathbf{W}_l^{-1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega) \times \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega), \\ &(\boldsymbol{u}, \pi) \longmapsto (-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi, \, -\operatorname{div} \boldsymbol{u}, \, \gamma\boldsymbol{u}),\end{aligned}$$

est trivialement continu et injectif. Il est aussi surjectif d'après le point (i) ce qui en fait un isomorphisme, d'où l'estimation. ◇

Il reste à démontrer l'existence d'une solution lorsque $n/p' - l \leq 1$. Pour une condition de Dirichlet homogène, un argument de dualité permet de le déduire du précédent. Le cas non-homogène s'obtient ensuite par relèvement.

Théorème 3.11 *Soient Ω un domaine extérieur de frontière $C^{1,1}$, $l \in \mathbb{Z}$ et p vérifiant (H) et $n/p' - l \leq 1$. Si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\Omega)$, $g \in L_l^p(\Omega)$, et $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1/p',p}(\partial\Omega)$, vérifient la condition de compatibilité :*

$$\forall(\boldsymbol{v}, \eta) \in \mathcal{N}_{-l}^{p'}(\Omega), \quad <\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}> + <g, \eta> + <\boldsymbol{\varphi}, (\nu\nabla\boldsymbol{v} - \eta I).\boldsymbol{n}>_{\partial\Omega} = 0, \qquad (3.24)$$

le problème (S_{ext}) a une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$ et il existe $C > 0$ ne dépendant que de Ω, p, n, ν et l, telle que :

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}_l^{1,p}} + \| \pi \|_{L_l^p} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} + \| g \|_{L_l^p} + \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1/p',p}}), \qquad (3.25)$$

Preuve : *i) Condition de Dirichlet homogène :* Nous avons déjà remarqué que si $n = 2$, l'égalité $2/p' - l = 1$ ne vaut que pour $p = 2$ et $l = 0$. Dans ce cas, le résultat est déjà démontré par le Théorème 3.2 et nous supposons donc que $2/p' - l < 1$ si $n = 2$. Compte tenu de cette restriction, nous posons pour $n \geq 2$, $k = -l$ et $q = p'$ et vérifions aisément que $n/q' - k > 1$. En particulier, il résulte clairement du Théorème 3.10 que l'opérateur :

$$\begin{aligned} T \ : (\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_k^{1,q}(\Omega) \times L_k^q(\Omega))/\mathcal{N}_k^q(\Omega) &\longrightarrow \mathbf{W}_k^{-1,q}(\Omega) \times L_k^q(\Omega), \\ (\boldsymbol{u}, \pi) &\longmapsto (-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi, -\operatorname{div}\boldsymbol{u}), \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Il en est donc de même pour son adjoint :

$$T^* \ : (\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)) \longrightarrow (\mathbf{W}_l^{-1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)) \perp \mathcal{N}_{-l}^{p'}(\Omega).$$

De plus, les formules de Green établissent de manière standard que :

$$T^*(\boldsymbol{u}, \pi) = (-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi, -\operatorname{div}\boldsymbol{u}),$$

d'où l'existence d'une solution satisfaisant l'estimation (3.25) lorsque $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$.

ii) Condition de Dirichlet non-homogène : Grâce à la Proposition 2.2, la donnée au bord $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$ admet un relèvement $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega)$ avec

$$\| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}_l^{1,p}} \leq C \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)}. \tag{3.26}$$

Le problème (S_{ext}) est donc équivalent, en posant $\boldsymbol{u_0} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}$, au problème :

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u_0} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} + \nu\Delta\boldsymbol{w}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u_0} = g + \operatorname{div}\boldsymbol{w}, \ \text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u_0}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0}.$$

Or, celui-ci a une solution dans $\mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$ si et seulement si ($cf.$ (i)) :

$$\forall\, (\boldsymbol{v}, \eta) \in \mathcal{N}_{-l}^{p'}(\Omega), \quad < \boldsymbol{f} + \nu\Delta\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} > + < g + \operatorname{div}\boldsymbol{w}, \eta >= 0. \tag{3.27}$$

Mais, étant donnés $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \mathcal{N}_{-l}^{p'}(\Omega)$ et $\boldsymbol{n}$ la normale extérieure à Ω, les formules de Green permettent d'introduire la distribution $(\nu\nabla\boldsymbol{v} - \eta I).\boldsymbol{n}$ sur $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \forall\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\overline{\Omega}), \quad < (\nu\nabla\boldsymbol{v} - \eta I).\boldsymbol{n}, \gamma\boldsymbol{\psi} >_{\partial\Omega} \ &= \int_\Omega (-\nu\boldsymbol{v}.\Delta\boldsymbol{\psi} - \eta\operatorname{div}\boldsymbol{\psi})d\boldsymbol{x}, \\ &= \int_\Omega (\nu\nabla\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{\psi} - \eta\operatorname{div}\boldsymbol{\psi})d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Comme $\nabla\boldsymbol{v}, \eta \in L_{-l}^{p'}(\Omega)$, ce crochet de dualité se prolonge grâce à la densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $W_l^{1,p}(\Omega)$, en une forme linéaire continue sur $\mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$, c'est-à-dire

$$(\nabla\boldsymbol{v} - \eta I).\boldsymbol{n} \in \mathbf{W}^{-1/p',p'}(\partial\Omega).$$

En outre, on a la formule de Green : $\forall (\boldsymbol{v}, \eta) \in \mathcal{N}^{p'}_{-l}(\Omega),\ \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{W}^{1,p}_l(\Omega),$

$$< (\nu \nabla \boldsymbol{v} - \eta I).\boldsymbol{n}, \gamma \boldsymbol{\psi} >_{\partial\Omega} = -\nu < \boldsymbol{v}, \Delta \boldsymbol{\psi} >_{\mathbf{W}^{1,p'}_{-l} \times \mathbf{W}^{1,p}_l} + < \eta, \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} >_{L^{p'}_{-l} \times L^p_l} . \quad (3.28)$$

En posant $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{w}$ dans (3.28), l'équivalence entre les conditions (3.27) et (3.24) est prouvée. De plus, l'estimation obtenue au point (i) pour $\boldsymbol{u_0}$ et (3.26) entraînent immédiatement :

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_l} + \| \pi \|_{L^p_l} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_l} + \| g \|_{L^p_l} + \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1/p',p}}),$$

ce qui termine la démonstration. $\diamondsuit$

Le Théorème 1.1 est ainsi complètement établi. Le comportement asymptotique des solutions est alors une conséquence immédiate de la Proposition I.3.9.

Corollaire 3.12 *Soient Ω un domaine extérieur, $l \in \mathbb{Z}$ et $p > n$ satisfaisant (H), toute solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}_l(\Omega) \times L^p_l(\Omega)$ fournie par le Théorème 1.1 vérifie :*

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = o(r^{1-n/p-l}) \ \text{si } n/p + l \neq 1, \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = o(\ln r) \ \text{sinon.}$$

Remarque 3.13 Dans toute cette section, la régularité $C^{1,1}$ assignée à Ω n'est probablement pas optimale. Par exemple, lorsque $p = 2$, les résultats établis restent valables si Ω est seulement lipschitzien.

Remarque 3.14 Rappelons que dans un ouvert borné, l'existence d'une solution au problème de Stokes requiert que les données g et $\boldsymbol{\varphi}$ vérifient une condition de compatibilité (voir Théorème 3.3). D'un point de vue physique, cette condition relève de l'incompressibilité du fluide qui est contraint de s'écouler dans un volume fini. Dans un domaine extérieur, donc de volume infini, cette condition de compatibilité n'apparaît plus. En effet, dans le Théorème 1.1, nous avons vu d'une part que la condition (1.1) est vide si $n/p' - l > 1$. D'autre part, si $n/p' - l \leq 1$, l'interprétation "physique" de (1.1) porte sur des propriétés particulières des actions extérieures exercées sur le fluide. Nous renvoyons le lecteur à la Section 5 de ce chapitre pour plus de précisions sur cette question (voir en particulier Remarque 5.6).

4 Régularité des solutions

Dans cette section, nous considérons $l \in \mathbb{Z}$ et p tels que l'hypothèse (H) soit satisfaite et nous introduisons l'espace $W^{2,p}_{l+1}(\Omega)$ des restrictions à Ω des fonctions de $W^{2,p}_{l+1}(\mathbb{R}^n)$ (défini par (I.2.3)). On le munit naturellement d'une structure d'espace de Banach réflexif avec la norme :

$$\| v \|_{W^{2,p}_{l+1}(\Omega)} = (\| v \|^p_{W^{1,p}_l(\Omega)} + \| \nabla^2 v \|^p_{L^p_{l+1}(\Omega)})^{1/p}.$$

Nous établissons alors l'analogue du Théorème I.5.1 dans un domaine extérieur. Comme pour les résultats précédents, nous analysons séparément la régularité au voisinage de l'infini puis au voisinage du bord.

Théorème 4.1 *Soient Ω un domaine extérieur de frontière $C^{1,1}$, l un entier, p satisfaisant (H). Etant donnée une solution $(\boldsymbol{u},\pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\Omega) \times L_l^p(\Omega)$ du problème (S) avec $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}_{l+1}^p(\Omega)$, $g \in W_{l+1}^{1,p}(\Omega)$ et $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1+1/p',p}(\partial\Omega)$ alors $(\boldsymbol{u},\pi)$ appartient à $\mathbf{W}_{l+1}^{2,p}(\Omega) \times W_{l+1}^{1,p}(\Omega)$. En outre, si $n/p' \neq l+1$, on a l'estimation :*

$$\inf_{(\boldsymbol{v},\eta)\in\mathcal{N}_l^p(\Omega)} (\| \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \|_{\mathbf{W}_{l+1}^{2,p}} + \| \pi+\eta \|_{W_{l+1}^{1,p}}) \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}_{l+1}^p} + \| g \|_{W_{l+1}^{1,p}} + \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1+1/p',p}}),$$

et si $n/p' = l+1$:

$$\begin{aligned}\inf_{(\boldsymbol{v},\eta)\in\mathcal{N}_l^p(\Omega)} (\| \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \|_{\mathbf{W}_{l+1}^{2,p}} + \| \pi+\eta \|_{W_{l+1}^{1,p}}) \leq\ & C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}_{l+1}^p} + \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} + \\ & + \| g \|_{W_{l+1}^{1,p}} + \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1+1/p',p}}),\end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de ν, n, p et l.

Preuve :

<u>*i) Régularité*</u> : Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction nulle si $|\boldsymbol{x}| \leq R_0$ et égale à 1 si $|\boldsymbol{x}| \geq 2R_0$. On prolonge les fonctions $\boldsymbol{u}\psi$ et $\pi\psi$ par zéro dans Ω' et on note encore $(\boldsymbol{u}\psi,\pi\psi)$ les fonctions prolongées. Alors, $(\boldsymbol{u}\psi,\pi\psi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L_l^p(\mathbb{R}^n)$ et

$$-\nu\Delta(\boldsymbol{u}\psi) + \nabla(\pi\psi) = \boldsymbol{f}_0, \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{u}\psi) = g_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n,$$

$$\text{avec} \qquad \boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{f}\psi - \nu(2\nabla\boldsymbol{u}\nabla\psi + \boldsymbol{u}\Delta\psi) + \pi\nabla\psi, \quad g_0 = g\psi - \boldsymbol{u}.\nabla\psi.$$

Les dérivées de ψ étant à support compact dans Ω, on vérifie facilement que

$$(\boldsymbol{f}_0, g_0) \in \mathbf{L}_{l+1}^p(\mathbb{R}^n) \times W_{l+1}^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Le Théorème I.5.1 montre donc que

$$(\boldsymbol{u}\psi,\pi\psi) \in \mathbf{W}_{l+1}^{2,p}(\mathbb{R}^n) \times W_{l+1}^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

La régularité de $(\boldsymbol{u},\pi)$ est alors établie dans Ω^{2R_0}. Celle dans Ω_{2R_0} vient des équations vérifiées par $\boldsymbol{u}$ et π dans cet ouvert et du résultat suivant qui découle directement du Théorème 3.3 et de [4] (Th. 4.8, p. 129) :

Théorème 4.2 (Amrouche-Girault [4]) *Soit $\mathcal{O}$ un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, de frontière $C^{1,1}$. Soit $(\boldsymbol{w},\tau) \in \mathbf{W}^{1,q}(\mathcal{O}) \times L^p(\mathcal{O})$ tel que*

$$-\nu\Delta\boldsymbol{w} + \nabla\tau = \boldsymbol{f}, \ \operatorname{div}\boldsymbol{w} = g \ \ \textit{dans } \mathcal{O}, \ \boldsymbol{w}_{|\partial\mathcal{O}} = \boldsymbol{\varphi},$$

avec $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^q(\mathcal{O}), g \in W^{1,q}(\mathcal{O})$ et $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1+1/q',q}(\partial\mathcal{O})$, alors $(\boldsymbol{w},\tau) \in \mathbf{W}^{2,q}(\mathcal{O}) \times W^{1,q}(\mathcal{O})$.

ii) Estimation : Le point précédent montre notamment que

$$\mathcal{N}_l^p(\Omega) \subset \mathbf{W}_{l+1}^{2,p}(\Omega) \times W_{l+1}^{1,p}(\Omega).$$

Réciproquement, toute solution dans $\mathbf{W}_{l+1}^{2,p}(\Omega) \times W_{l+1}^{1,p}(\Omega)$ du problème (S_{ext}) à données nulles appartient trivialement à $\mathcal{N}_l^p(\Omega)$.

Ainsi, l'opérateur :

$$\begin{aligned}(T,\gamma) \ : (\mathbf{W}_{l+1}^{2,p}(\Omega) \times W_{l+1}^{1,p}(\Omega))/\mathcal{N}_l^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbf{L}_{l+1}^{p}(\Omega) \times W_{l+1}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1+1/p',p}(\partial\Omega), \\ (\boldsymbol{u},\pi) &\longmapsto (-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi, \, -\operatorname{div}\boldsymbol{u}, \, \gamma\boldsymbol{u}),\end{aligned}$$

est continu et injectif. Rappelons alors que (considérer les injections duales)

$$L_{l+1}^p(\Omega) \subset W_l^{-1,p}(\Omega) \ \text{ ssi } \ n/p' \neq l+1. \tag{4.1}$$

En particulier, si $n/p' \neq l+1$, l'image de (T,γ) est clairement l'espace des fonctions $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}_{l+1}^p(\Omega)$, $g \in W_{l+1}^{1,p}(\Omega)$ et $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1+1/p',p}(\partial\Omega)$ qui vérifient (1.1). C'est un sous-espace fermé de $\mathbf{L}_{l+1}^p(\Omega) \times W_{l+1}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1+1/p',p}(\partial\Omega)$, et donc un espace de Banach. Par conséquent, (T,γ) est un isomorphisme sur son image, d'où l'estimation.

Lorsque $n/p' = l+1$, on procède de même en remplaçant, du fait de (4.1), l'espace $\mathbf{L}_{l+1}^p(\Omega)$ par $\mathbf{L}_{l+1}^p(\Omega) \cap \mathbf{W}_l^{-1,p}(\Omega)$ dès la définition de (T,γ). $\diamondsuit$

Le comportement asymptotique de ces solutions régulières est précisé par le :

Corollaire 4.3 *Soit $l \in \mathbb{Z}$ et $p > n$ satisfaisant (H), toute solution $(\boldsymbol{u},\pi)$ appartenant à $\mathbf{W}_{l+1}^{2,p}(\mathbb{R}^n) \times W_{l+1}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ fournie par le Théorème 4.1 vérifie :*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = o(r^{1-n/p-l}) \ \text{si } n/p + l \neq 1, \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = o(\ln r) \ \ \text{sinon}, \\ \nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = o(r^{-n/p-l}), \quad \pi(\boldsymbol{x}) = o(r^{-n/p-l}).\end{gathered}$$

Application : Contrôle des dérivées secondes dans $L^p(\Omega)$. Replaçons nous un instant dans l'espace entier $\mathbb{R}^n$ et appliquons le Théorème I.5.1 avec $l = -1$. Si $p \neq n$ et $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$, il existe $(\boldsymbol{u},\pi) \in \mathbf{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

Comme $1 - l - n/p = 2 - n/p < 2$, le noyau $N_{[2-n/p]}$ (voir paragraphe I.3.1, pour une définition de cet espace) est toujours inclus dans N_1. Par conséquent, l'estimation (I.5.1) entraîne trivialement la suivante :

$$\| \nabla^2\boldsymbol{u} \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \| \nabla\pi \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Cette estimation vaut en fait pour toute solution $(\boldsymbol{v}, \eta)$ telle que $\nabla^2 \boldsymbol{v}$ et $\nabla \eta$ appartiennent à $L^p(\mathbb{R}^n)$. En effet, comme $\nabla^2(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on a nécessairement

$$(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, \eta - \pi) \in N_1,$$

de sorte que $\nabla^2 \boldsymbol{u} = \nabla^2 \boldsymbol{v}$ et $\nabla \pi = \nabla \eta$.

En revanche, il est connu que la situation est différente dans un domaine extérieur. Par exemple, si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, g et $\boldsymbol{\varphi}$ étant nulles, W. Borchers et T. Miyakawa établissent dans [11] que toute solution du problème (S_{ext}) avec $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega)$ et $\pi \in W^{1,p}(\Omega)$ vérifie :

$$\| \nabla^2 \boldsymbol{u} \|_{L^p(\Omega)} + \| \nabla \pi \|_{L^p(\Omega)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \qquad \text{ssi } \; n \geq 3 \text{ et } p < n/2. \tag{4.2}$$

Par ailleurs, H. Kozono et T. Ogawa montrent dans [43](Th. 1.1) l'estimation *a priori* pour $n \geq 2$ (voir aussi [38] pour le cas $p = 2$) :

$$\| \nabla^2 \boldsymbol{u} \|_{L^p(\Omega)} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \| \nabla \boldsymbol{u} \|_{L^r(\Omega)}) \quad \text{si } 1 < p \leq r. \tag{4.3}$$

L'étude du problème extérieur menée jusqu'ici nous permet d'améliorer sensiblement ces estimations. Nous introduisons pour cela l'espace :

$$\mathbf{E} = \{ \boldsymbol{v} \in \mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega), \;\; \exists \eta, (\boldsymbol{v}, \eta) \in \mathcal{N}_{-1}^p(\Omega) \}. \tag{4.4}$$

Pour $p \neq n$, $\mathbf{E}$ est un sous-espace de dimension finie de $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^{1,p}_{-1}(\Omega)$ (*cf.* Corollaires 3.4 et 3.6) et nous le munissons d'une norme quelconque $\| \,.\, \|_{\mathbf{E}}$. Soit de plus $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_k)$ une base de $\mathbf{E}$. Le Lemme I.4.9 avec $E = \mathbf{W}_1^{-1,p'}(\Omega)$, $G = \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ et $M = \mathbf{E}$ montre l'existence de $(\boldsymbol{\Phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_k)$ dans $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ vérifiant :

$$< \mathcal{E}_i, \boldsymbol{\Phi}_j >= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

Grâce à ces relations, l'opérateur

$$P\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} < \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\Phi}_i > \mathcal{E}_i, \tag{4.5}$$

est un projecteur linéaire continu de $\mathbf{W}_0^{2,p}$ sur $\mathbf{E}$. Nous prouvons alors le :

Théorème 4.4 *Soit $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, $p \neq n$, g et $\boldsymbol{\varphi}$ étant nulles et $(\boldsymbol{u}, \pi)$ une solution du problème (S_{ext}) avec $\nabla^2 \boldsymbol{u}, \nabla \pi \in L^p(\Omega)$. Alors, $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ et vérifie :*

$$\| \nabla^2 \boldsymbol{u} \|_{L^p(\Omega)} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \| P\boldsymbol{u} \|_{\mathbf{E}}), \tag{4.6}$$

où $C > 0$ est indépendante de $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{u}$.

Preuve :
i) Grâce aux Théorèmes 1.1 et 4.1 avec $l = -1$, il existe $(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ vérifiant (S_{ext}). L'estimation du Théorème 4.1 entraîne :

$$\inf_{\boldsymbol{v} \in \mathbf{E}} \| \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \|_{\mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}. \tag{4.7}$$

De plus, grâce à la continuité de P, on obtient simplement l'équivalence de normes sur $\mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega)/\mathbf{E}$:

$$\inf_{\boldsymbol{v} \in \mathbf{E}} \| \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \|_{\mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega)} \sim \| \boldsymbol{w} - P\boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega)}.$$

Ainsi, (4.7) implique :

$$\| \nabla^2 (\boldsymbol{w} - P\boldsymbol{w}) \|_{L^p(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{w} - P\boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}^p(\Omega)},$$

et donc

$$\| \nabla^2 \boldsymbol{w} \|_{L^p(\Omega)} \leq C (\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}^p} + \| \nabla^2 (P\boldsymbol{w}) \|_{L^p(\Omega)}). \tag{4.8}$$

En particulier, (4.6) découle directement de (4.8) car $\| \nabla^2 \, . \|_{L^p}$ est une norme sur $\mathbf{E}$, donc équivalente à $\| \, . \|_{\mathbf{E}}$.

ii) Soit maintenant un couple de distributions $(\boldsymbol{u}, \pi)$ solution du même problème vérifiant seulement $\nabla^2 \boldsymbol{u} \in L^p(\Omega)$ et $\nabla \pi \in \mathbf{L}^p(\Omega)$. Posons

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}, \quad \theta = \tau - \pi.$$

Alors, $(\boldsymbol{z}, \theta) \in W_{loc}^{2,p}(\overline{\Omega}) \times \mathbf{W}_{loc}^{1,p}(\overline{\Omega})$ vérifie les équations (S_{ext}) avec des données nulles et la méthode de représentation développée pour caractériser les noyaux permet d'établir que $(\boldsymbol{z}, \theta) \in \mathcal{N}_{-1}^p(\Omega)$. Or, le Théorème 4.1 montre que $\mathcal{N}_{-1}^p(\Omega)$ est un sous-espace de $\mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$. Ainsi, il vient $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ de sorte que l'on est ramené au cas précédent. $\diamondsuit$

Lorsque $p < n/2$, l'espace $\mathbf{E}$ est réduit à l'élément nul, et l'estimation (4.6) généralise (4.2) en supprimant l'hypothèse $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega)$. D'autre part, le second membre de (4.6) est fini ce qui n'est pas toujours le cas pour (4.3). Toutefois, si $n/2 \leq p < n$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega)$ alors $\nabla \boldsymbol{u} \in L^{p^*}(\Omega)$ grâce aux injections de Sobolev. Mais, même dans ce cas, on peut montrer (voir remarque ci-dessous) que, pour toute fonction $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega)$ nulle au bord et vérifiant $\nabla \boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$

$$\| P\boldsymbol{u} \|_{\mathbf{E}} \leq C \| \nabla \boldsymbol{u} \|_{L^r(\Omega)}, \tag{4.9}$$

alors que l'inégalité inverse de (4.9) n'est pas satisfaite (elle entraînerait l'injectivité de P qui est bien sur absurde).

Soulignons par ailleurs que la restriction $p \neq n$ qui provient de l'hypothèse (H) peut être éliminée par une étude plus approfondie des espaces avec poids dans les cas critiques. Enfin, le raisonnement qui a servi à prouver le Théorème 4.4 fournit aussi des estimations *a priori* lorsque g et $\boldsymbol{\varphi}$ ne sont pas nulles, ou encore dans le cadre plus général des espaces $L^p_l(\Omega)$.

Remarque 4.5 Le Théorème 4.4 est valable pour tout projecteur linéaire P continu de $\mathbf{W}^{2,p}_0(\Omega)$ sur $\mathbf{E}$. Cependant, le choix de l'opérateur (4.5) permet de démontrer simplement l'estimation *a priori* (4.9). En effet, par construction, celui-ci est aussi un projecteur continu de $\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\Omega)$ (muni de sa topologie faible) sur $\mathbf{E}$.

Supposons alors par l'absurde qu'il existe une suite $\boldsymbol{u}_n \in \mathbf{W}^{2,p}_0(\Omega)$ nulle au bord de Ω telle que :

$$\forall n \geq 0, \ \| P\boldsymbol{u}_n \|_{\mathbf{E}} = 1 \ \text{ et } \ \| \nabla \boldsymbol{u}_n \|_{L^r} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.10}$$

D'une part, $\mathbf{E}$ étant de dimension finie, il vient à extraction d'une sous-suite près :

$$P\boldsymbol{u}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{v}, \quad \text{dans } \mathbf{E}, \quad \text{avec } \ \| \boldsymbol{v} \|_{\mathbf{E}} = 1. \tag{4.11}$$

Notons d'autre part $\overline{\boldsymbol{u}_n}$ la moyenne de $\boldsymbol{u}_n$ sur Ω_{R_0}. Alors, (4.10) et l'inégalité de Poincaré-Wirtinger montrent que

$$\| \boldsymbol{u}_n - \overline{\boldsymbol{u}_n} \|_{\mathbf{W}^{1,r}(\Omega_{R_0})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.12}$$

En particulier, la trace de $\boldsymbol{u}_n - \overline{\boldsymbol{u}_n}$ sur $\partial\Omega$ tend vers $\mathbf{0}$ dans $\mathbf{W}^{1/r',r}(\partial\Omega)$. Mais $\boldsymbol{u}_n$ étant nulle sur $\partial\Omega$, on obtient alors $\overline{\boldsymbol{u}_n} \to \mathbf{0}$. Par conséquent, $\boldsymbol{u}_n$ tend vers $\mathbf{0}$ dans $\mathbf{W}^{1,r}(\Omega_{R_0})$ d'après (4.12). Cette propriété est indépendante du choix de R_0 de sorte qu'elle entraîne :

$$\boldsymbol{u}_n \rightharpoonup \mathbf{0}, \quad \text{dans } \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\Omega).$$

Ainsi, $P\boldsymbol{u}_n$ tend vers $\mathbf{0}$ dans $\mathbf{E}$, d'où la contradiction avec (4.11).

5 Développements asymptotiques

Nous démontrons ici l'analogue du Théorème I.4.8 dans un domaine extérieur. Pour clarifier le propos, nous établissons seulement des développements asymptotiques à l'ordre 1. Désignons par $(\boldsymbol{e}_1, \dots \boldsymbol{e}_n)$ la base canonique de $\boldsymbol{\mathcal{P}}_0$ et associons lui, avec les notations des Théorèmes 3.1 et 3.5, les familles :

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_i, \Pi_i) &= (\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{e}_i), -\eta(\boldsymbol{e}_i)), \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{si } \ n \geq 3, \\ (\mathbf{V}_i, \Pi_i) &= (U\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{e}_i), \mathbf{Q}.\boldsymbol{e}_i - \eta(\boldsymbol{e}_i)), \ i = 1, 2 \quad \text{si } \ n = 2. \end{aligned}$$

Elles forment une base commune aux noyaux $\mathcal{N}^q_k(\Omega)$ pour $0 < 1 - n/q - k < 1$ et plus particulièrement aux noyaux $\mathcal{N}^{p'}_{1-n}(\Omega)$ pour $p > n$. Nous introduisons aussi, pour tout triplet $(\boldsymbol{f}, g, \boldsymbol{\varphi}) \in \mathbf{W}^{-1,p}_{n-1} \times L^p_{n-1}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$ avec $p > n$, le vecteur $\mathbf{F}$ de coordonnées :

$$F_i = <\boldsymbol{f}, \mathbf{V}_i> + <g, \Pi_i> + <\boldsymbol{\varphi}, (\nabla\mathbf{V}_i - \Pi_i I)\boldsymbol{n}>_{\partial\Omega}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{5.1}$$

qui est l'analogue dans Ω de $m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{f})$ dans $\mathbb{R}^n$.

Les résultats principaux de cette section sont alors les suivants :

Théorème 5.1 *Soient Ω un domaine extérieur de frontière $C^{1,1}$ et $p > n \geq 3$. Etant donné $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}^{-1,p}_{n-1}(\Omega) \times L^p_{n-1}(\Omega)$ et $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$, le problème (S_{ext}) a une et une seule solution vérifiant :*

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x})\mathbf{F} + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}), \quad \pi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}).\mathbf{F} + \tau(\boldsymbol{x}), \tag{5.2}$$

et $(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}^{1,p}_{n-1}(\Omega) \times L^p_{n-1}(\Omega)$. Alors, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = o(r^{2-n-n/p})$ et il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de ν, n, p et Ω telle que

$$\| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_{n-1}} + \| \tau \|_{L^p_{n-1}} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_{n-1}} + \| g \|_{L^p_{n-1}} + \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1/p',p}}).$$

Théorème 5.2 *Soient Ω un domaine extérieur de $\mathbb{R}^2$, de frontière $C^{1,1}$ et $p > 2$. Etant donné $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}^{-1,p}_1(\Omega) \times L^p_1(\Omega)$ et $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$, le problème (S_{ext}) a une et une seule solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ vérifiant :*

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = A\mathbf{F} + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}), \tag{5.3}$$

où A est une matrice 2×2 inversible ne dépendant que de Ω et $(\boldsymbol{w}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}_1(\Omega)\times L^p_1(\Omega)$. Alors, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = o(r^{-n/p})$ et il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de ν, p et Ω telle que

$$\| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_1} + \| \pi \|_{L^p_1} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_1} + \| g \|_{L^p_1} + \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1/p',p}}).$$

Les termes dominants de ces expressions proviennent naturellement du fait que les conditions de compatibilité du Théorème 1.1 ne sont pas satisfaites. La démonstration de ces résultats repose sur une décomposition des données qui permet d'une part de se ramener au Théorème 1.1 et d'autre part à un problème à données régulières. La première étape de la démonstration est commune aux deux résultats. Nous traitons ensuite séparément les cas $n = 2$ et $n \geq 3$. Les estimations sont établies dans la dernière étape. Nous posons $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ dans toute la démonstration. Le cas de données au bord quelconques s'en déduit grâce aux relèvements à support compact de la Proposition 2.2 et à la formule de Green (3.28).

Preuve des Théorèmes 5.1 et 5.2 :
i) Soit $p > n \geq 2$. Appliquons le Lemme I.4.9 avec

$$E = \mathbf{W}^{-1,p}_{n-1}(\Omega) \times L^p_{n-1}(\Omega), \quad M = \mathcal{N}^{p'}_{1-n}(\Omega), \quad G = \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega).$$

On peut alors écrire $(\boldsymbol{f}, g) = (\boldsymbol{f}^1, g^1) + (\boldsymbol{f}^2, g^2)$ avec

$$(\boldsymbol{f}^1, g^1) \in (\mathbf{W}^{-1,p}_{n-1}(\Omega) \times L^p_{n-1}(\Omega))\perp\mathcal{N}^{p'}_{1-n}(\Omega), \quad (\boldsymbol{f}^2, g^2) \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$$

D'après le Théorème 1.1, il existe donc $(\boldsymbol{u}^1, \pi^1) \in \mathring{\mathbf{W}}^{1,p}_{n-1}(\Omega) \times L^p_{n-1}(\Omega)$ vérifiant :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{u}^1 + \nabla\pi^1 = \boldsymbol{f}^1, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}^1 = g^1, \quad \text{dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u}^1_{|\partial\Omega} = \mathbf{0}. \tag{5.4}$$

Il existe de même $(\boldsymbol{u}^2, \pi^2) \in \mathring{\mathbf{W}}^{1,2}_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tel que :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{u}^2 + \nabla\pi^2 = \boldsymbol{f}^2, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}^2 = g^2, \quad \text{dans } \ \Omega, \quad \boldsymbol{u}^2_{|\partial\Omega} = \mathbf{0}, \tag{5.5}$$

Prolongeons $\boldsymbol{u}^2, \pi^2, \boldsymbol{f}^2$ et g^2 par zéro dans Ω' sans en modifier les notations. Les équations (5.5) prolongées s'écrivent :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{u}^2 + \nabla\pi^2 = \boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}^2 = g^2, \quad \text{dans } \ \mathbb{R}^n, \tag{5.6}$$

où $\boldsymbol{h} \in \mathbf{W}^{-1,2}_0(\mathbb{R}^n)$ est à support compact dans $\partial\Omega$. Pour établir (5.2) et (5.3), nous détaillons ci dessous les propriétés de $(\boldsymbol{u}^2, \pi^2)$.

ii) le cas $n \geq 3$: Comme $n/2 > 1$, le Théorème I.4.4 entraîne

$$\boldsymbol{u}^2 = U * (\boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h}) + F * \nabla g^2, \quad \pi^2 = \mathbf{Q} * (\boldsymbol{f} - \nu\nabla g^2). \tag{5.7}$$

Le Théorème I.4.11 montre de plus que

$$\boldsymbol{u}^2 = U m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h}) + \boldsymbol{w}^2, \quad \pi^2 = \mathbf{Q}.m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h}) + \tau^2, \tag{5.8}$$

avec pour tout entier $k \geq 0$, $\nabla^k \boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{x}) = O(r^{1-n-k})$ et $\nabla^k \tau^2(\boldsymbol{x}) = O(r^{-n-k})$. Ainsi, $(\boldsymbol{w}^2, \tau^2) \in \mathbf{W}^{1,p}_{n-1}(\Omega^{R_0}) \times L^p_{n-1}(\Omega^{R_0})$ pour R_0 assez grand. D'autre part, (5.8) entraîne que $(\boldsymbol{w}^2, \tau^2) \in \mathbf{W}^{1,2}_0(\Omega_{R_0}) \times L^2(\Omega_{R_0})$ et avec (5.5), on vérifie que

$$-\nu\Delta \boldsymbol{w}^2 + \nabla\tau^2 = \boldsymbol{f}^2, \ \operatorname{div} \boldsymbol{v}^2 = g^2 \text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{w}^2_{|\partial B_{R_0}} = \boldsymbol{w}^2, \ \ \boldsymbol{w}^2_{|\partial\Omega} = -U m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h}).$$

Comme les données de ce problème sont régulières, on déduit du Théorème 3.3 que $(\boldsymbol{w}^2, \tau^2) \in \mathbf{W}^{1,p}_0(\Omega_{R_0}) \times L^p(\Omega_{R_0})$. Finalement, on a donc :

$$(\boldsymbol{w}^2, \tau^2) \in \mathbf{W}^{1,p}_{n-1}(\Omega) \times L^p_{n-1}(\Omega).$$

Le couple $(\boldsymbol{u}^1 + \boldsymbol{u}^2, \pi^1 + \pi^2)$ résout alors le problème (S_{ext}) et vérifie (5.2) à l'égalité $\mathbf{F} = m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h})$ près. Or, par construction, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^2$ avec

$$F^2_j = <\boldsymbol{f}^2, \mathbf{V}_j> + <g^2, \Pi_j>, \quad j = 1, \dots, n.$$

De plus, le Théorème 4.1 appliqué à (5.5) montre que $(\boldsymbol{u}^2, \pi^2) \in \mathbf{W}^{2,2}_1(\Omega) \times W^{1,2}_1(\Omega)$ et on obtient de même que $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{e}_j), \eta(\boldsymbol{e}_j)) \in \mathbf{W}^{2,2}_1(\Omega) \times W^{1,2}_1(\Omega)$. Grâce à ces régularités, on peut écrire :

$$F^2_j = \int_\Omega f^2_j d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \eta(\boldsymbol{e}_j) \operatorname{div} \boldsymbol{u}^2 d\boldsymbol{x} - \int_\Omega (-\nu\Delta \boldsymbol{u}^2 + \nabla\pi^2).\boldsymbol{v}(\boldsymbol{e}_j) d\boldsymbol{x},$$

et intégrer par parties les deux derniers termes, ce qui donne :

$$F_j^2 = \int_\Omega f_j^2 d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} (\nu \nabla \boldsymbol{u}^2 - \pi^2 I)\boldsymbol{n}.\boldsymbol{e}_j ds. \tag{5.9}$$

Calculons maintenant $m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h})$. Soit $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égale à $\boldsymbol{e}_j$ dans une boule contenant $\Omega' \cup \operatorname{supp} \boldsymbol{f}^2$, alors

$$m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h}) =< \boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h}, \psi >= -\nu \int_\Omega \boldsymbol{u}^2 . \Delta \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \pi^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{x}.$$

Soit, après intégration par parties,

$$m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h}) = \int_\Omega f_j^2 d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} (\nu \nabla \boldsymbol{u}^2 - \pi^2 I)\boldsymbol{n}.\boldsymbol{e}_j ds,$$

ce qui, avec (5.9), montre l'égalité requise.

iii) le cas $n = 2$: Repartons du problème prolongé (5.6). Dans ce cas, on sait grâce à la Proposition I.3.3 que $\boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^2) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0$, c'est-à-dire $m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h}) = \mathbf{0}$. Comme $\mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ contient les constantes, la technique de représentation désormais habituelle, montre qu'il existe $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_0$ tel que :

$$\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{a} + U * (\boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h}) + F * \nabla g^2, \quad \pi^2 = \mathbf{Q} * (\boldsymbol{f} - \nu \nabla g^2). \tag{5.10}$$

Posons $\boldsymbol{w}^2 = U * (\boldsymbol{f}^2 + \boldsymbol{h}) + F * \nabla g^2$. Grâce au Théorème I.4.11, on a au voisinage de l'infini

$$\nabla^k \boldsymbol{w}^2 = O(r^{-1-k}), \quad \nabla^k \pi^2 = O(r^{-2-k}).$$

Comme au point précédent ceci nous permet d'obtenir que $(\boldsymbol{w}^2, \pi^2) \in \mathbf{W}_1^{1,p}(\Omega) \times L_1^p(\Omega)$. En sommant $(\boldsymbol{u}^1, \pi^1)$ donnée au (i) par (5.4) et $(\boldsymbol{u}^2, \pi^2)$, on obtient une solution vérifiant (5.3) pourvu que $\boldsymbol{a} = A\mathbf{F}$, ce que nous établissons ci-dessous.

L'écriture de $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{w}^2$ est unique au sens suivant. Supposons qu'il existe $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_0$ et $\tilde{\boldsymbol{w}} \in \mathbf{W}_1^{1,p}(\Omega)$ tels que $\boldsymbol{u}^2 = \tilde{\boldsymbol{a}} + \tilde{\boldsymbol{w}}$ alors comme les fonctions de $\mathbf{W}_1^{1,p}(\Omega)$ s'annulent à l'infini (*cf.* Proposition I.3.9), il vient nécessairement $\boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{a}}$ et $\boldsymbol{w}^2 = \tilde{\boldsymbol{w}}$. Ainsi, $\boldsymbol{a}$ est déterminé de manière unique et linéaire par $(\boldsymbol{f}^2, g^2)$ et nous le notons désormais $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{f}^2, g^2)$. La décomposition introduite grâce au Lemme I.4.9 montre d'autre part que $(\boldsymbol{f}^2, g^2)$ appartient à un supplémentaire topologique N de $(\mathbf{W}_1^{-1,p}(\Omega) \times L_1^p(\Omega)) \perp \mathcal{N}_{-1}^{p'}(\Omega)$. La dimension de N est celle de $\mathcal{N}_{-1}^{p'}(\Omega)$, c'est-à dire 2. Par ailleurs, si $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{f}^2, g^2) = \mathbf{0}$, alors on déduit de (5.10) que

$$(\boldsymbol{u}^2, \pi^2) = (\boldsymbol{w}^2, \pi^2) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_1^{1,p}(\Omega) \times L_1^p(\Omega),$$

soit, d'après le Théorème 1.1 :

$$(\boldsymbol{f}^2, g^2) \in (\mathbf{W}_1^{-1,p}(\Omega) \times L_1^p(\Omega)) \perp \mathcal{N}_{-1}^{p'}(\Omega).$$

Nous en déduisons donc l'injectivité de l'application linéaire :

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}}_0, \\ (\boldsymbol{f}^2, g^2) &\mapsto \boldsymbol{a}(\boldsymbol{f}^2, g^2). \end{aligned}$$

Comme $\dim \boldsymbol{\mathcal{P}}_0 = 2$, elle est aussi bijective. Ainsi, elle est représentée dans toutes bases de ces espaces par une matrice inversible. Plus particulièrement, nous choisissons pour base de N celle associée par Lemme I.4.9 à la base $(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{e}_i), -\eta(\boldsymbol{e}_i))$ de $\mathcal{N}^{p'}_{-1}(\Omega)$. En représentant l'application entre cette base et la base canonique de $\mathcal{P}_0$, on obtient alors

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{f}^2, g^2) = A\mathbf{F}^2 = A\mathbf{F},$$

soit le résultat.

iv) estimations : Soit $(\boldsymbol{u}, \pi)$ une solution du problème (S_{ext}) avec $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ vérifiant (5.2) si $n \geq 3$ ou (5.3) si $n = 2$. Le couple $(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}^{1,p}_{n-1}(\Omega) \times L^p_{n-1}(\Omega)$ vérifie alors clairement les égalités :

$$\begin{gathered} -\Delta \boldsymbol{w} + \nabla \tau = \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{w} = g \quad \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{w}_{|\partial\Omega} = -U\mathbf{F} \text{ si } n \geq 3, \\ \boldsymbol{w}_{|\partial\Omega} = -A\mathbf{F} \text{ si } n = 2. \end{gathered}$$

Or, si $n \geq 3$, on a immédiatement

$$\| U\mathbf{F} \|_{\mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)} \leq C|\, \mathbf{F}\,| \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_{n-1}} + \| g \|_{L^p_{n-1}}),$$

et de même, si $n = 2$,

$$\| A\mathbf{F} \|_{\mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)} \leq C|\, \mathbf{F}\,| \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_1} + \| g \|_{L^p_1}).$$

Les estimations annoncées sont alors une conséquence directe de l'estimation fournie par le Théorème 1.1 et l'unicité en découle clairement. $\diamondsuit$

Si l'on considère des données plus régulières, nous obtenons les

Théorème 5.3 *Lorsque $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{L}^p_n(\Omega) \times W^{1,p}_n(\Omega)$ et $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1+1/p',p}(\partial\Omega)$, alors dans le Théorème 5.1, on a de plus $(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}^{2,p}_n(\Omega) \times W^{1,p}_n(\Omega)$ avec*

$$\| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}^{2,p}_n} + \| \tau \|_{W^{1,p}_n} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}^p_n} + \| g \|_{W^{1,p}_n} + \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1+1/p',p}}),$$

$$\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \nabla(U(\boldsymbol{x})\mathbf{F}) + O(r^{1-n-n/p}), \quad \pi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}).\mathbf{F} + O(r^{1-n-n/p}).$$

Théorème 5.4 *Lorsque $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{L}^p_2(\Omega) \times W^{1,p}_2(\Omega)$ et $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1+1/p',p}(\partial\Omega)$, alors dans le Théorème 5.2, on a de plus $(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}^{2,p}_2(\Omega) \times W^{1,p}_2(\Omega)$ avec*

$$\| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}^{2,p}_n} + \| \tau \|_{W^{1,p}_n} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{L}^p_2} + \| g \|_{W^{1,p}_2} + \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1+1/p',p}}),$$

$$\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = O(r^{-1-n/p}), \quad \pi(\boldsymbol{x}) = O(r^{-1-n/p}).$$

Preuve : Comme $p > n$, on vérifie que $n/p' \neq l + 1$. Alors, il suffit d'appliquer le Théorème 4.1 dans le point (iv) de la démonstration précédente. Le Corollaire 4.3 fournit ensuite le contrôle asymptotique.

Remarque 5.5 L'analogie formelle entre les résultats obtenus dans $\mathbb{R}^n$ et dans un domaine extérieur est très claire en dimension $n \geq 3$. En revanche, le lecteur aura noté que de ce point de vue, la dimension 2 est singulière à de nombreux égards.

Remarque 5.6 En ce qui concerne les résultats de développements asymptotiques (Section I.4 et II.5), l'analogie s'étend aussi à la signification physique (au sens large) des quantités concernées. Par exemple, les coefficients $m_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{f})$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{F}$ dans Ω représentent tous deux la force totale exercée sur le fluide. En effet, nous avons vu que (voir preuve des Théorèmes 5.1, 5.2, (ii), en particulier (5.9)) pour des données régulières, $\mathbf{F}$ s'écrit en fait :

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \boldsymbol{f} + \int_{\partial\Omega} (\nu \nabla \boldsymbol{u} - \pi I)\boldsymbol{n} ds,$$

soit la somme de la force totale volumique exercée sur le fluide et de la réaction de l'obstacle Ω' dans l'écoulement du fluide. Mais par définition (voir (5.1)), lorsque $\mathbf{F}$ s'annule, c'est à dire quand les actions sur le fluide sont globalement équilibrées, les hypothèses du Théorème 1.1 sont satisfaites et la solution a un meilleur comportement asymptotique. Ce phénomène mathématique, qui sera également établi pour les équations stationnaires de Navier-Stokes, mériterait d'être confronté avec des propriétés expérimentales des écoulements de fluides visqueux incompressibles.

Chapitre III

Equations stationnaires de Navier-Stokes : Solutions faibles

Etant donnés un fluide visqueux incompressible, $\boldsymbol{u}$ son champ de vitesses et π sa pression, nous considérons des écoulements extérieurs stationnaires régis par le système :

$$(NS) \qquad \begin{aligned} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} \qquad & \text{dans} \;\; \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \qquad & \text{dans} \;\; \Omega, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \qquad & \text{sur} \;\; \partial\Omega, \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{f}$ représente le champ des forces volumiques appliquées au fluide et $\nu > 0$, sa viscosité. L'ouvert Ω est un domaine extérieur comme introduit au Chapitre II et la condition de nullité au bord modélise l'adhérence du fluide sur l'obstacle $\overline{\Omega'}$.

Nous nous intéressons à divers aspects de la résolution mathématique de ce problème et nous étudions plus particulièrement le cas où le fluide est au repos à l'infini, soit

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to+\infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

1 Solutions faibles

Pour prendre en compte un critère physique essentiel des écoulements considérés, nous introduisons les solutions d'énergie finie du problème (NS) (voir à ce sujet la contribution fondamentale de J. Leray [47, 48]).

Définition 1.1 Une solution faible (ou d'énergie finie) du problème (NS) est la donnée d'un champ de vitesses $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^1_{loc}(\overline{\Omega})$, nul sur $\partial\Omega$, avec $\nabla\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)$ et tel que pour tout champ de vecteurs $\boldsymbol{\varphi}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega),\, \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}$:

$$\nu \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} = <\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}> . \tag{1.1}$$

Etant donnée $\boldsymbol{u}$ une solution faible, on obtient en appliquant le Théorème I.2.3 (de Rham) à la distribution :

$$\boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} + \nu\Delta\boldsymbol{u},$$

l'existence d'une distribution π telle que le couple $(\boldsymbol{u}, \pi)$ soit solution du problème (NS) au sens des distributions. Comme Ω est connexe, π est unique à une constante près.

Nous montrons dans un premier temps l'existence de solutions faibles vérifiant de plus $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$. Nous étudions ensuite la régularité de ces solutions et de la pression associée en dimension 3. En dimension 2, nous établissons des propriétés remarquables pour des solutions faibles vérifiant certaines conditions de symétrie.

1.1 Existence de solutions faibles

Nous suivons la construction effectuée par J. Leray : On considère une suite de problèmes (NS) posés sur des domaines bornés. Une solution est obtenue par passage à la limite. Rappelons en particulier que $R_0 > 0$ est un réel tel que Ω' soit contenu dans la boule ouverte B_{R_0} de rayon R_0 centrée à l'origine. Pour tout $R \geq R_0$, nous posons

$$\Omega_R = \Omega \cap B_R \quad \text{et} \quad \Omega^R = \Omega - \overline{\Omega_R}.$$

Enfin, signalons que dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^3$, le problème (NS) est naturellement considéré sans condition de bord.

Théorème 1.2 *Soit Ω un domaine extérieur lipschitzien inclus dans $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ ou $\Omega = \mathbb{R}^3$. Etant donnée $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$, il existe une solution faible $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ du problème (NS) qui vérifie*

$$\nu\| \nabla\boldsymbol{u} \|_{L^2(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)}.$$

Il existe de plus une fonction $\pi \in L^2(\Omega_R)$, pour tout $R \geq R_0$, unique à une constante près, telle que $(\boldsymbol{u}, \pi)$ soit une solution au sens des distributions du problème (NS).

Preuve :
i) Approximation : Il est clair que la restriction de $\boldsymbol{f}$ à Ω_R appartient à $\mathbf{H}^{-1}(\Omega_R)$ et on montre aisément que

$$\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_R)} \leq \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)}. \tag{1.2}$$

D'après Temam [66] (Ch. II, Th. 1.2, p. 164), le problème :

$$\begin{matrix} -\nu\Delta\boldsymbol{u}_R + \boldsymbol{u}_R.\nabla\boldsymbol{u}_R + \nabla\pi_R = \boldsymbol{f} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u}_R = 0 \end{matrix} \quad \text{dans } \Omega_R, \qquad \boldsymbol{u}_R = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_R, \tag{1.3}$$

admet une solution $(\boldsymbol{u}_R, \pi_R)$ avec $\boldsymbol{u}_R \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_R)$ et $\pi_R \in L^1_{loc}(\Omega_R)$ vérifiant :

$$\nu \| \nabla \boldsymbol{u}_R \|_{L^2(\Omega_R)} \leq \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_R)}. \tag{1.4}$$

Pour tout $R \geq R_0$, la fonction $\boldsymbol{u}_R$ prolongée par $\mathbf{0}$ dans Ω^R, toujours notée $\boldsymbol{u}_R$, appartient à $\mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$ (*resp.* $\mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$) et vérifie d'après (1.4) et (1.2) :

$$\nu \| \nabla \boldsymbol{u}_R \|_{L^2(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)}. \tag{1.5}$$

Ceci montre avec le Théorème II.2.1 (*resp.* Théorème I.1.1 si $\Omega = \mathbb{R}^3$), que $\boldsymbol{u}_R$ est bornée dans $\mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$ (*resp.* $\mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$). Ces espaces étant réflexifs, il vient facilement, à extraction de sous-suites près :

$$\boldsymbol{u}_R \rightharpoonup \boldsymbol{u} \text{ dans } \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla \boldsymbol{u}_R \rightharpoonup \nabla \boldsymbol{u} \text{ dans } L^2(\Omega), \tag{1.6}$$

$$\nu \| \nabla \boldsymbol{u} \|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf \nu \|\nabla \boldsymbol{u}_R\|_{L^2} \leq \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)}. \tag{1.7}$$

ii) Passage à la limite : Il reste à vérifier que $\boldsymbol{u}$ satisfait (1.1). Soient $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ et $R_1 \geq R_0$ tel que $\operatorname{supp} \boldsymbol{\varphi} \subset \Omega_{R_1}$. Alors, pour tout $R \geq R_1$, on déduit de (1.3) que

$$\nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_R . \nabla \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{u}_R . \nabla \boldsymbol{u}_R . \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} = < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} > . \tag{1.8}$$

D'après (1.6), il est clair que

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_R . \nabla \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} \overset{R \to +\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} . \nabla \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x}.$$

Rappelant que pour tout ouvert borné $\mathcal{O}$, l'injection de $\mathbf{H}^1(\mathcal{O})$ dans $\mathbf{L}^2(\mathcal{O})$ est compacte, on déduit de (1.6), qu'à extraction de sous-suite près, $\boldsymbol{u}_R$ converge vers $\boldsymbol{u}$ dans $L^2_{loc}(\Omega)$. Il est alors clair que

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}_R . \nabla \boldsymbol{u}_R . \boldsymbol{\varphi} \, d\boldsymbol{x} \overset{R \to +\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \boldsymbol{u} . \nabla \boldsymbol{u} . \boldsymbol{\varphi} \, d\boldsymbol{x},$$

de sorte que $\boldsymbol{u}$ vérifie (1.1).

iii) La pression : L'existence d'une distribution π telle que $(\boldsymbol{u}, \pi)$ soit solution de (NS) découle du Théorème I.2.3, comme nous l'avons déjà signalé. De plus, on a

$$\forall R \geq R_0, \quad \boldsymbol{f} - \boldsymbol{u} . \nabla \boldsymbol{u} + \nu \Delta \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega_R).$$

En effet, $\boldsymbol{f}$ et $\Delta \boldsymbol{u}$ vérifient trivialement cette régularité. En outre, les injections de Sobolev montrent que $\boldsymbol{u} \in L^p(\Omega_R)$ pour tout p si $n = 2$ et $p \leq 6$ si $n = 3$. Comme $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, on a $\boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u} = \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})$ et il vient ainsi $\boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{-1,r}(\Omega_R)$ pour tout r si $n = 2$ et $r \leq 3$ si $n = 3$ et donc en particulier pour $r = 2$. La régularité de π résulte alors de [65] (lemme 9, p. 30). $\diamond$

Remarque 1.3 Dans l'espace entier $\mathbb{R}^2$, l'estimation *a priori* (1.5) permet seulement d'établir qu'il existe des vecteurs constants $\mathbf{c}_R$ tels que :

$$\boldsymbol{u}_R + \mathbf{c}_R \rightharpoonup \boldsymbol{u} \text{ dans } \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u}_R + \mathbf{c}_R \to \boldsymbol{u} \text{ dans } \mathbf{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

En effet, d'après le Théorème I.1.1, la semi-norme $\| \nabla . \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ définit une norme équivalente sur l'*espace quotient* $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)/\mathcal{P}_0$. Pour passer à la limite, il suffirait par exemple de montrer que $\mathbf{c}_R$ converge, ce qui n'est, à notre connaissance, pas établi.

Remarque 1.4 Rappelons que dans un ouvert borné $\mathcal{O}$ de dimension $2 \leq n \leq 4$, la forme trilinéaire :

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \int_{\mathcal{O}} u_i \partial_i v_j w_j d\boldsymbol{x},$$

est continue sur $\mathbf{H}^1(\mathcal{O}) \times \mathbf{H}^1(\mathcal{O}) \times \mathbf{H}^1(\mathcal{O})$. De plus, si $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^1_0(\mathcal{O})$, alors

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}). \tag{1.9}$$

Ces propriétés (voir Temam [66], Ch. II), sont des arguments importants dans la démonstration de l'unicité des solutions pour des données petites. Elles permettent aussi d'établir l'égalité d'énergie :

$$\nu \int_{\mathcal{O}} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 = < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} >_{\mathbf{H}^{-1} \times \mathbf{H}^1_0}, \tag{1.10}$$

qui traduit l'équilibre entre l'énergie cinétique dissipée et le travail de $\boldsymbol{f}$ dans l'écoulement. Dans le cas d'un domaine extérieur de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3, la forme b n'est pas définie sur $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_0^{1,2}(\Omega)$, et on ne sait pas à ce jour établir l'unicité des solutions faibles pour des données petites (nous rappellerons, le moment venu, quelques résultats partiels disponibles dans la littérature). De même, on ne sait pas si toutes les solutions faibles vérifient une propriété similaire à (1.10). L'unicité et l'égalité d'énergie sont toutefois valables dans le cadre, certes moins pertinent, de la dimension 4 (voir annexe).

2 Régularité des solutions faibles en dimension 3.

On se place maintenant en dimension 3 et on s'intéresse aux propriétés de régularité globale des solutions faibles données par le Théorème 1.2 et de la pression associée.

Nous établissons dans un premier temps, sans hypothèse supplémentaire, des propriétés d'intégrabilité à l'infini de la pression π.

Proposition 2.1 *Soient Ω un domaine extérieur lipschitzien de $\mathbb{R}^3$ ou $\Omega = \mathbb{R}^3$. Etant donnée $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$, la pression π donnée par le Théorème 1.1 peut se mettre sous la forme*

$$\pi = \tau^1 + \tau^2 \quad \textit{avec} \quad \tau^1 \in W_0^{1,3/2}(\Omega),\ \tau^2 \in L^2(\Omega).$$

Avant de démontrer ce résultat, introduisons une partition de l'unité que nous utiliserons fréquemment par la suite. Soit $\gamma > 0$, on pose

$$\psi_1 + \psi_2 = 1 \quad \text{avec} \quad \psi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \tag{2.1}$$

$$\psi_1(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ si } |\boldsymbol{x}| \leq R_0, \quad \psi_1(\boldsymbol{x}) = 1 \text{ si } |\boldsymbol{x}| \geq R_0 + \gamma. \tag{2.2}$$

Alors, étant donnée $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega_R)$ pour tout $R \geq R_0$, une solution du problème (NS), nous introduisons d'une part le couple $(\boldsymbol{u}^1, \pi^1) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \times L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ donné par :

$$(\boldsymbol{u}^1, \pi^1) = (\boldsymbol{u}\psi_1, \pi\psi_1) \ \text{ dans } \Omega, \quad (\boldsymbol{u}^1, \pi^1) = (\mathbf{0}, 0) \ \text{ dans } \Omega'.$$

D'autre part, nous notons $(\boldsymbol{u}^2, \pi^2) = (\boldsymbol{u}\psi_2, \pi\psi_2)$ dans Ω. En particulier, on a clairement $(\boldsymbol{u}^2, \pi^2) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_{R_0+\gamma}) \times L^2(\Omega_{R_0+\gamma})$.

En outre, dans $\mathbb{R}^3$ si $i = 1$ et dans $\Omega_{R_0+\gamma}$ si $i = 2$, on a les égalités

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u}^i + \nabla\pi^i = \boldsymbol{f}^i, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u}^i = g^i, \tag{2.3}$$

$$\text{avec} \quad \boldsymbol{f}^i = \boldsymbol{f}\psi_i - 2\nu\nabla\boldsymbol{u}\nabla\psi_i - \nu\boldsymbol{u}\Delta\psi_i + \pi\nabla\psi_i - (\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u})\psi_i, \qquad g^i = -\boldsymbol{u}.\nabla\psi_i. \tag{2.4}$$

Dans cette dernière inégalité, avec $i = 1$, on a par exemple noté $\boldsymbol{f}\psi_1$ la distribution sur $\mathbb{R}^3$ donnée par :

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3), \qquad <\boldsymbol{f}\psi_1, \boldsymbol{\varphi}>_{\mathbb{R}^3} = <\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}\psi_1>_\Omega,$$

et tous les autres termes intervenant dans $\boldsymbol{f}^1$ ou g^1 font appel à une notation similaire (ce qui est licite car ψ_1 est C^∞ à support dans Ω).

Nous donnons maintenant la

Preuve de la Proposition 2.1 :
i) Considérons tout d'abord le terme non-linéaire $\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}$. D'après les injections de Sobolev, on a l'inclusion $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \subset \mathbf{L}^6(\Omega)$. L'inégalité de Hölder entraine donc

$$\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega). \tag{2.5}$$

En particulier, on en déduit que $(\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u})\psi_1 \in \mathbf{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$. Or, $W_1^{1,3}(\mathbb{R}^3) \subset L^3(\mathbb{R}^3)$ avec injection continue, d'où, par dualité : $L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \subset W_{-1}^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, le Théorème I.1.2 (avec $p = 3/2, l = -1$) montre qu'il existe $(\boldsymbol{v}^1, \eta^1) \in \mathbf{W}_{-1}^{1,3/2}(\mathbb{R}^3) \times L_{-1}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$-\nu\Delta\boldsymbol{v}^1 + \nabla\eta^1 = -(\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u})\psi_1, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}^1 = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Grâce à (2.5), le Théorème I.5.1 entraine de plus $(\boldsymbol{v}^1, \eta^1) \in \mathbf{W}_0^{2,3/2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)$.

ii) D'autre part, comme $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$, il est clair que $\boldsymbol{f}\psi_1 \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ car ψ^1 est bornée ainsi que toutes ses dérivées. On a aussi $\nabla \boldsymbol{u} \nabla \psi_1, \boldsymbol{u}\Delta\psi_1, \pi\nabla\psi_1 \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ et $\boldsymbol{u}.\nabla\psi_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ car les dérivées de ψ_1 (comme celles de ψ_2) sont à support compact dans Ω. On peut alors introduire, grâce au Théorème I.1.2 ($p = 2, l = 0$), un couple $(\boldsymbol{v}^2, \eta^2) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v}^2 + \nabla\eta^2 = \boldsymbol{f}\psi_1 - 2\nu\nabla\boldsymbol{u}\nabla\psi_1 - \nu\boldsymbol{u}\Delta\psi_1 + \pi\nabla\psi_1, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}^2 = -\boldsymbol{u}.\nabla\psi_1, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Posons finalement $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^1 - \boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^2$ et $\tau = \pi^1 - \eta^1 - \eta^2$. Il vient par différence

$$-\nu\Delta\boldsymbol{w} + \nabla\tau = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Ainsi, $\boldsymbol{w}$ est une distribution tempérée et (voir la preuve de la Proposition I.3.2) biharmonique. C'est donc un polynôme qui appartient de plus à $\mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) + \mathbf{W}_{-1}^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)$. Le même raisonnement que celui utilisé dans la preuve de la Proposition I.5.3 montre que $\boldsymbol{w}$ est alors un polynôme constant. Il en résulte que $\nabla\tau = 0$ et donc l'existence d'une constante c telle que $\pi^1 = \eta^1 + \eta^2 + c$. Par conséquent,

$$\pi = \pi\psi_1 + \pi\psi_2 = \eta^1 + (\eta^2 + \pi\psi_2) + c,$$

soit la propriété annoncée en posant $\tau^1 = \eta^1$ et $\tau^2 = \eta^2 + \pi\psi_2$ puisque $\pi\psi_2 \in L^2(\Omega)$. $\Diamond$

Remarque 2.2 On peut associer la pression τ^1 aux effets visqueux, *i.e.* au terme $\nu\Delta\boldsymbol{u}$ tandis que τ^2 est associée au terme de convection $\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}$. En effet, en écrivant :

$$(-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\tau^1) + (\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\tau^2) = \boldsymbol{f},$$

chaque gradient de pression à la même régularité que le terme correspondant de viscosité ou de convection.

2.1 Résultats de régularité L^p

Dans les considérations qui suivent, nous désignerons toujours par π le représentant obtenu dans la Proposition 2.1 . Nous améliorons alors, sous certaines conditions de régularité du champ de force $\boldsymbol{f}$, la régularité de $(\boldsymbol{u}, \pi)$. Effectuons tout d'abord une brève digression pour étudier la régularité du terme $\boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{v}$ relativement à celle de $\boldsymbol{v}$.

Lemme 2.3 *Soit Ω un domaine extérieur lipschitzien ou $\Omega = \mathbb{R}^3$.*
i) Si $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$, alors $\boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{-1,3}(\Omega)$.
ii) Si $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,3}(\Omega)$, alors $\boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^{s_1}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{-1,s_2}(\Omega)$, avec $3/2 \leq s_1 < 3$ et $s_2 \geq 3$.

Preuve : Rappelons que pour $p < 3$, on déduit des injections de Sobolev l'injection continue $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p*}(\Omega)$ puis, par dualité, l'injection continue

$$\forall p < 3, \quad L^p(\Omega) \subset W_0^{-1,p^*}(\Omega). \tag{2.6}$$

i) Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$. On a déjà établi (voir (2.5)) que $\boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega)$. L'injection $\mathbf{L}^{3/2}(\Omega) \subset \mathbf{W}_0^{-1,3}(\Omega)$ complète alors la propriété (*i*).

ii) Si $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,3}(\Omega)$, alors $\nabla \boldsymbol{v} \in L^r(\Omega)$, $2 \leq r \leq 3$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^6(\Omega)$. Alors, les inégalités de Gagliardo-Nirenberg (voir par exemple, Nirenberg [55], p. 125, avec $r = 3$, $q = 6$, $j = 0$, et $m = 1$) montrent que $\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, pour tout $6 \leq p < +\infty$. L'inégalité de Hölder entraîne alors la régularité $L^{s_1}(\Omega)$, $3/2 \leq s_1 \leq 3$ et l'inclusion (2.6) complète la preuve. $\diamondsuit$

Nous établissons alors le

Théorème 2.4 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine extérieur de frontière $C^{1,1}$ ou $\Omega = \mathbb{R}^3$. Soient $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega)$ avec $p \geq 3$ et $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times (L^2(\Omega) + W_0^{1,3/2}(\Omega))$ une solution du problème (NS). Alors, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$, et $\pi \in L^3(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.*

Preuve : Nous utilisons à nouveau les relations (2.3), (2.4), vérifiées par les couples $(\boldsymbol{u}^1, \pi^1)$ et $(\boldsymbol{u}^2, \pi^2)$ introduits grâce à la partition de l'unité (2.1), (2.2).

i) le cas $p = 3$: D'après le Lemme 2.3, on a $\boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{-1,3}(\Omega)$, ce qui entraîne que $(\boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u})\psi_1 \in \mathbf{W}_0^{-1,3}(\mathbb{R}^3)$. De plus, comme $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^1_{loc}(\Omega)$ et $\pi \in L^2(\Omega_{R_0+\gamma})$, on obtient grâce aux injections de Sobolev que

$$-2\nu \nabla \boldsymbol{u} \nabla \psi_1 - \nu \boldsymbol{u} \Delta \psi_1 + \pi \nabla \psi_1 \in \mathbf{W}_0^{-1,3}(\mathbb{R}^3), \qquad - \boldsymbol{u}.\nabla \psi_1 \in L^3(\mathbb{R}^3).$$

Ainsi, le couple $(\boldsymbol{f}^1, g^1)$ donné par (2.4) appartient à $\mathbf{W}_0^{-1,3}(\mathbb{R}^3) \times L^3(\mathbb{R}^3)$. Il existe alors, d'après le Théorème I.1.2 ($p = 3$, $l = 0$), un couple $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \mathbf{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3) \times L^3(\mathbb{R}^3)$ tel que :

$$-\nu \Delta \boldsymbol{v} + \nabla \eta = \boldsymbol{f}^1, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = g^1 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Compte tenu de (2.3), il vient par différence :

$$-\nu \Delta(\boldsymbol{u}^1 - \boldsymbol{v}) + \nabla(\pi^1 - \eta) = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{u}^1 - \boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \tag{2.7}$$

Ainsi, $\boldsymbol{u}^1 - \boldsymbol{v}$ est un polynôme biharmonique appartenant à $\mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) + \mathbf{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$, soit (voir preuve de la Proposition I.5.3) un polynôme constant $\mathbf{c}$. Or, $\mathbf{c} \in \mathbf{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$, de sorte que

$$\boldsymbol{u}^1 \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3). \tag{2.8}$$

D'autre part, comme $\boldsymbol{u}^1 - \boldsymbol{v} = \mathbf{c}$, les égalités (2.7) entraînent aussi que $\nabla(\pi^1 - \eta) = \mathbf{0}$, d'où l'existence d'une constante d telle que $\pi = \eta + d$, $\eta \in L^3(\mathbb{R}^3)$. De plus, rappelant que $\mathbf{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3) \subset L^3(\mathbb{R}^3)$, on déduit de cette égalité et de la régularité de π que $d \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^3(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, $d = 0$ et on a finalement :

$$\pi^1 = \eta \in L^3(\mathbb{R}^3). \tag{2.9}$$

Rappelons par ailleurs que $(\boldsymbol{u}^2, \pi^2) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_{R_0+\gamma}) \times L^2(\Omega_{R_0+\gamma})$ et vérifie (2.3) avec $i = 2$. De plus, on établit que

$$(\boldsymbol{f}^2, g^2) \in \mathbf{W}^{-1,3}(\Omega_{R_0+\gamma}) \times L^3(\Omega_{R_0+\gamma}),$$

avec des arguments similaires à ceux utilisés ci-dessus pour montrer que $(\boldsymbol{f}^1, g^1)$ appartient à $\mathbf{W}_0^{-1,3}(\mathbb{R}^3) \times L^3(\mathbb{R}^3)$. Grâce au Théorème II.3.3, nous déduisons de cette régularité que $(\boldsymbol{u}^2, \pi^2) \in \mathbf{W}^{1,3}(\Omega_{R_0+\gamma}) \times L^3(\Omega_{R_0+\gamma})$ et donc que

$$(\boldsymbol{u}^2, \pi^2) \in \mathbf{W}_0^{1,3}(\Omega) \times L^3(\Omega). \tag{2.10}$$

Comme $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^1 + \boldsymbol{u}^2$ et $\pi = \pi^1 + \pi^2$, la conclusion découle de (2.8), (2.9) et (2.10).

ii) le cas $p > 3$: Soit $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega)$. Un argument d'interpolation que nous ne détaillons pas ici montre que $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,3}(\Omega)$. Grâce au point précedent, on sait ainsi que $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,3}(\Omega)$ et $\pi \in L^3(\Omega)$. Le Lemme 2.3 (ii) implique en particulier que $\boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega)$. De plus, par injection de Sobolev, on a

$$\boldsymbol{u} \in L^p(\Omega_R), \quad \forall R \geq R_0.$$

On en déduit comme au point précédent que

$$(\boldsymbol{f}^1, g^1) \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{f}^2, g^2) \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega_{R_0+\gamma}) \times L^p(\Omega_{R_0+\gamma}).$$

Il suffit alors de reprendre le raisonnement du point (i) en remplaçant l'exposant 3 par p pour obtenir le résultat. $\diamondsuit$

Corollaire 2.5 *Si, dans le Théorème 2.4, on a $p > 3$, alors*

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega) \quad \textit{et} \quad \lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}. \tag{2.11}$$

Preuve : Comme $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$, on a en particulier

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^6(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla \boldsymbol{u} \in L^p(\Omega), \quad p > n = 3,$$

ce qui entraîne de manière classique le résultat. $\diamondsuit$

Remarque 2.6 Dans la démonstration du Théorème 2.4, la régularité de la solution près du bord et celle au voisinage de l'infini sont obtenues séparément grâce à la partition de l'unité (2.1),(2.2). En particulier, les propriétés d'intégrabilité au voisinage de l'infini restent valables sous des hypothèses plus faibles. En l'ocurrence, considérons, dans un domaine extérieur lipschitzien, une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times (L^2(\Omega) + \mathbf{W}_0^{1,3/2}(\Omega))$. On peut montrer que si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,3}(\Omega^{R_0}) \cap \mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega^{R_0})$ avec $p \geq 3$, alors

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega^{R_0+\gamma}) \cap \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega^{R_0+\gamma}), \quad \pi \in L^3(\Omega^{R_0+\gamma}) \cap L^p(\Omega^{R_0+\gamma}),$$

pour tout $\gamma > 0$. En effet, malgré une hypothèse plus faible, la régularité $(\boldsymbol{f}^1, g^1)$ n'est pas modifiée. On établit donc sans modifications les propriétés de $(\boldsymbol{u}^1, \pi^1)$ qui donnent la conclusion. De même, si $p > 3$ alors on obtient que $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_{R_0+\gamma})$ et que $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ s'annule à l'infini. On pourra établir des variantes similaires pour les résultats de régularité qui suivent. Signalons enfin qu'un résultat analogue au Théorème 2.4 avec $p = 3$ est établi dans Galdi [25] (lemme IX.1.1, p. 64).

Nous donnons maintenant des conditions pour que $\nabla^2 \boldsymbol{u}$ et $\nabla\pi$ appartiennent à un espace $L^p(\Omega)$. Commençons par un lemme préliminaire qui nous permettra ensuite d'appliquer les résultats de régularité du Chapitre II :

Lemme 2.7 *Soit Ω un ouvert extérieur de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ou $\Omega = \mathbb{R}^n$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $1 < p < q < +\infty$ tels que $n/q + \beta > n/p + \alpha$. Alors, les inclusions suivantes ont lieu :*

$$L^q_\beta(\Omega) \subset L^p_\alpha(\Omega), \qquad W^{1,q}_\beta(\Omega) \subset W^{1,p}_\alpha(\Omega),$$

avec injections continues.

Preuve :
i) Soit $v \in L^q_\beta(\Omega)$. Comme $n/q + \beta > n/p + \alpha$, on a

$$\alpha - \beta < n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}). \tag{2.12}$$

Soit $1 < r < +\infty$ tel que $1/r = 1/p - 1/q$ (un tel r existe car $1 < p < q$). L'inégalité (2.12) entraîne trivialement que

$$\rho^{\alpha-\beta} \in L^r(\Omega).$$

De plus par hypothèse, $\rho^\beta v \in L^q(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder montre que

$$\| \rho^\alpha v \|_{L^p(\Omega)} \leq \| \rho^{\alpha-\beta} \|_{L^r(\Omega)} \| \rho^\beta v \|_{L^q(\Omega)},$$

ce qui établit la première inclusion et la continuité de l'injection canonique.

ii) La seconde inclusion est une conséquence directe de la première si $n/q + \beta \neq 1$ (il n'y a pas de poids logarithmique dans $W^{1,q}_{\beta}(\Omega)$). Lorsque $n/q + \beta = 1$, on note de plus que (2.12) entraîne aussi que

$$\rho^{\alpha-\beta} \ln \rho \in L^r(\Omega).$$

L'inégalité de Hölder permet de conclure car $\rho^{\alpha-1}v = (\rho^{\alpha-\beta}\ln\rho).(\rho^{\beta-1}v/\ln\rho)$. $\diamondsuit$

Nous établissons alors le théorème suivant :

Théorème 2.8 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *un domaine extérieur de frontière* $C^{1,1}$ *ou* $\Omega = \mathbb{R}^3$*. Soient* $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ *et* $(\boldsymbol{u},\pi) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times (L^2(\Omega) + W_0^{1,3/2}(\Omega))$ *une solution du problème* (NS)*. Si* $\boldsymbol{f}$ *satisfait de plus l'une des deux conditions :*

$$(a) \quad \boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p(\Omega), \quad \text{avec} \;\; 3/2 \leq p < 3,$$
$$(b) \quad \boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{-1,q}(\Omega) \quad \text{avec} \;\; q \geq p > 3,$$

alors, $\nabla^2 \boldsymbol{u} \in L^p(\Omega)$ *et* $\nabla\pi \in \mathbf{L}^p(\Omega)$.

Preuve :
i) Supposons la condition (a) satisfaite. Alors, d'après (2.6), on a aussi $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p^*}(\Omega)$ où $p^* \geq 3$. Ainsi, le Théorème 2.4 montre que

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2} \cap \mathbf{W}_0^{1,p^*}(\Omega), \quad \pi \in L^3(\Omega) \cap L^{p^*}(\Omega). \tag{2.13}$$

D'une part, en interpolant les régularités données par (2.13), il est clair que $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,r}(\Omega)$ pour tout r tel que $2 \leq r \leq p^*$. En choisissant en particulier $r = 3$, on déduit du Lemme 2.3 et de l'hypothèse (a) que

$$\boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega). \tag{2.14}$$

Supposons de plus que $p > 3/2$ et introduisons r tel que $3 < r < p^*$. Nous avons vu que $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,r}$ et (2.13) entraîne de même que $\pi \in L^r(\Omega)$. Mais, comme $r < p^*$, il est clair que $3/r > 3/p^* = 3/p - 1$. Ainsi, on a aussi $r > 3 > p$ et d'après le Lemme 2.7,

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_{-1}^{1,p}(\Omega), \quad \pi \in L^p_{-1}(\Omega). \tag{2.15}$$

Alors, comme par hypothèse

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0},$$

on peut appliquer le Théorème II.4.1 (*resp.* Théorème I.5.1 si $\Omega = \mathbb{R}^3$) avec $l = -1$ grâce à (2.14) et (2.15). Il en résulte que $(\boldsymbol{u},\pi) \in \mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ et en particulier que $\nabla^2\boldsymbol{u}, \nabla\pi \in L^p(\Omega)$.

Supposons finalement que $p = 3/2$. Comme $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ et grâce au Lemme 2.7, on a $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_{-1}^{1,3/2}(\Omega)$. D'autre part, $\pi = \tau^1 + \tau^2$ avec $\tau^1 \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$ et $\tau^2 \in L^2(\Omega)$.

L'inclusion $W_0^{1,3/2}(\Omega) \subset L_{-1}^{3/2}(\Omega)$ est triviale et le Lemme 2.7 montre de plus que $L^2(\Omega) \subset L_{-1}^{3/2}(\Omega)$. On a donc

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_{-1}^{1,3/2}(\Omega), \qquad \pi \in L_{-1}^{3/2}(\Omega),$$

d'où la conclusion d'après (2.14) et le Théorème II.4.1 (*resp.* I.5.1).

ii) Lorsque la condition (b) est satisfaite, alors $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,q}(\Omega)$, $q > 3$ et le Théorème 2.4 montre que

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2} \cap \mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega), \quad \pi \in L^3(\Omega) \cap L^q(\Omega). \tag{2.16}$$

On en déduit comme au point (i) la relation (2.14). De plus, si $p = q$, l'injection

$$\mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega) \times L^q(\Omega) \subset \mathbf{W}_{-1}^{1,p}(\Omega) \times L_{-1}^p(\Omega),$$

est triviale. Si $p > q$, celle-ci résulte du Lemme 2.7 car $p > 3$ implique $3/p - 1 < 0 < 3/q$. Le Théorème II.4.1 (*resp.* I.5.1) donne encore une fois la conclusion. $\diamondsuit$

Les régularités obtenues au Théorème 2.8 permettent finalement d'établir le

Corollaire 2.9 *Si, dans le Théorème 2.8, l'hypothèse* (a) *est satisfaite avec* $p > 3/2$ *alors* $\boldsymbol{u}$ *vérifie* (2.11). *De même, si l'hypothèse* (b) *est satisfaite alors* $\boldsymbol{u}$ *vérifie* (2.11) *et on a de plus* $\nabla \boldsymbol{u}, \pi \in L^\infty(\Omega)$ *et*

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to +\infty} \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \lim_{|\boldsymbol{x}| \to +\infty} \pi(\boldsymbol{x}) = 0 \ .$$

Preuve :

i) Si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, $3/2 < p < 3$, alors (2.6) montre que $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p^*}(\Omega)$ avec $p^* > 3$. Les hypothèses du Théorème 2.4 et du Corollaire 2.5 sont donc satisfaites.

ii) Supposons l'hypothèse (b) satisfaite. Comme $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,q}(\Omega)$, $q > 3$, on peut appliquer le Théorème 2.4 et le Corollaire 2.5, d'où (2.11). De plus, par hypothèse $\nabla \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)$ et d'après le Théorème 2.8, $\nabla^2 \boldsymbol{u} \in L^p(\Omega)$, $p > 3$; d'où le résultat pour $\nabla \boldsymbol{u}$. De même, on a $\pi \in L^3(\Omega)$ (voir (2.16)) et $\nabla \pi \in L^p(\Omega)$ ce qui permet de conclure. $\diamondsuit$

Remarque 2.10 On peut encore avec des hypothèses adéquates de régularité sur $\boldsymbol{f}$ établir des propriétés d'intégrabilité L^p des dérivées d'ordre supérieur. C'est par exemple le cas si la frontière de Ω est $C^{2,1}$ et si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ vérifie de plus une des conditions

$$\begin{aligned} &(a') \quad \boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad \text{avec} \quad 6/5 \le p < 3/2, \\ &(b') \quad \boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega), \quad \text{avec} \quad 3/2 < p < 3, \end{aligned}$$

qui sont respectivement des versions plus fortes de (a) et (b). Sous ces hypothèses, on établit alors que toute solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times (L^2(\Omega) + \mathbf{W}_0^{1,3/2}(\Omega))$ vérifie

$$\nabla^3 \boldsymbol{u}, \nabla^2 \pi \in L^p(\Omega),$$

en plus des régularités données par le Théorème 2.8 et le Corollaire 2.9. En outre, l'hypothèse (b') entraine que $\nabla^2 \boldsymbol{u}$ et $\nabla \pi$ s'annulent à l'infini. Nous ne détaillons pas la preuve de ces propriétés ici mais elle repose sur des arguments similaires aux précédents.

2.2 Un résultat de régularité pour la pression dans $\mathbb{R}^3$

Nous démontrons ici une légère amélioration de la régularité de la pression lorsque le problème (NS) est posé dans $\mathbb{R}^3$. Ce résultat utilise les propriétés de régularité $\mathcal{H}^1$ (voir section I.5.3 pour une définition) établies par R. Coifman, P.L.Lions, Y.Meyer et S. Semmes pour diverses quantités non-linéaires. Rappelons plus particulièrement le

Lemme 2.11 (C.L.M.S. [17], Th. II.1, (3)) *Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^6(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla \boldsymbol{v} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et* $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$. *Soit de plus $w \in L^6(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla w \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$, alors*

$$\nabla w . \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Nous allons démontrer le théorème ci-dessous.

Théorème 2.12 *Soit $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ et $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \times L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ une solution du problème (NS). Si on suppose de plus $\operatorname{div} \boldsymbol{f} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$, alors*

$$\pi \in W_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3) \quad et \quad D^2 \pi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3).$$

Preuve :
$i)$ Soit $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \times L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ une solution du problème (NS). On peut choisir, pour la pression *modulo* une constante additive, le représentant $\pi \in W_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3) + L^2(\mathbb{R}^3)$ obtenu dans la Proposition 2.1. En calculant la divergence de la première équation du problème (NS), il vient comme $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$:

$$\Delta \pi = \operatorname{div} \boldsymbol{f} - \operatorname{div} (\boldsymbol{u} . \nabla \boldsymbol{u}) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3.$$

Alors, comme $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, on vérifie que

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{u} . \nabla \boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{3} \nabla u_i . \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}.$$

Mais, $\mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, et $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ de sorte que l'on peut appliquer le Lemme 2.11 à chaque produit scalaire apparaissant sous le signe somme. On obtient donc, compte tenu de l'hypothèse sur $\boldsymbol{f}$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} - \operatorname{div} (\boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u}) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3). \tag{2.17}$$

ii) Rappelons (voir Lemme I.5.7) que $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$ est inclus dans $W_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)\perp\mathcal{P}_0$. En particulier, l'existence d'une fonction $\eta \in W_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\Delta\eta = \operatorname{div} \boldsymbol{f} - \operatorname{div} (\boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u}) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3.$$

découle de (2.17) et de l'isomorphisme (I.2.5) avec $n = 3$, $p = 3/2$ et $l = 0$. De plus, le Lemme I.5.8 montre que

$$\nabla^2\eta \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3). \tag{2.18}$$

Il est alors clair que $\pi - \eta \in L^2(\mathbb{R}^3) + W_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ et que c'est une fonction harmonique. C'est donc un polynôme appartenant à $L^2(\mathbb{R}^3) + L^3(\mathbb{R}^3)$ soit le polynôme nul. Ainsi, $\pi = \eta$ ce qui établit le résultat. $\diamondsuit$

Remarque 2.13 Nous ne savons pas adapter un tel résultat pour le problème extérieur. Tout au moins, si $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ est la restriction d'un fonction de $\mathcal{H}^1$ sur un voisinage de l'infini, il semble difficile d'obtenir que $\nabla^2\pi$ ait la même régularité. Finalement, signalons que ce résultat se combine de manière naturelle avec le Théorème 2.4, dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^3$ et où l'hypothèse (a) est satisfaite avec $p = 3/2$. En effet, si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$, on a alors $\operatorname{div} \boldsymbol{f} \in W_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)\perp\mathcal{P}_0$, espace qui contient $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$.

3 Quelques solutions explicites en dimension 2

Nous avons établi, pour un domaine extérieur de $\mathbb{R}^2$, l'existence de solutions faibles $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ du problème (NS) et d'une pression associée $\pi \in L^2(\Omega_R)$, pour tout $R \geq R_0$ (Théorème 1.2). Nous cherchons à nouveau des conditions assurant qu'une de ces solutions vérifie :

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}. \tag{3.1}$$

En dimension 3, nous avons vu que c'est le cas pour toute solution faible $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ pour peu que le champ de force $\boldsymbol{f}$ soit suffisamment régulier (Corollaire 2.5). Illustrons par quelques faits et exemples les difficultés supplémentaires que pose la dimension 2.

La différence tient essentiellement aux propriétés asymptotiques des fonctions de $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$. En dimension 3, on sait grâce à la Proposition I.3.8 que

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{u}(r,.)\|_{L^2(\Sigma)} = o(r^{-1/2}),$$

ce qui exprime, dans un sens faible, que $\boldsymbol{u}$ s'annule à l'infini. En revanche, en dimension 2, on sait que $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ contient par exemple les fonctions $(\ln\rho)^\beta$, $\beta < 1/2$ qui tendent vers $+\infty$ à l'infini. Plus généralement, on ne peut espérer controler le comportement asymptotique d'une solution $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ quelconque en supposant $\boldsymbol{f}$ régulière. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer un champ de vecteurs donné en coordonnées polaires $\boldsymbol{u} = u(r)\boldsymbol{e}_\theta$ où $u(r) \in C^\infty([0,+\infty[)$ est une fonction nulle au voisinage de 0, et égale à une constante non-nulle au voisinage de $+\infty$. Alors, il est clair que $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ et en posant $\pi = 0$, on vérifie sans difficultés que

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\pi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega),$$

mais que (3.1) n'est pas satisfaite. Pour une étude plus approfondie des propriétés générales des solutions d'énergie finie en dimension 2, nous renvoyons le lecteur aux travaux de D. Gilbarg, H.F Weinberger [30] et aux développements apportés par C.J. Amick [2, 3], puis C.G. Galdi [25] (Chap. X).

Nous étudions pour notre part un cas particulier où des hypothèses de symétrie permettent de simplifier considérablement le problème (NS). Nous obtenons alors une solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ par une construction explicite qui permet de plus une étude précise de $\boldsymbol{u}$ et π (régularité dans les espaces avec poids, comportement asymptotique, propriétés d'unicité).

3.1 Construction de solutions explicites

Rappelons tout d'abord quelques notations. Nous désignons par $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ la base locale orthonormée associée aux coordonnées polaires (r,θ) dans $\mathbb{R}^2$. En dimension 2, nous rappelons que le rotationnel $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ peut être identifié au champ scalaire $\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2$ et que son opérateur adjoint est :

$$\nabla^\perp\varphi = \begin{pmatrix} -\partial_2\varphi \\ \partial_1\varphi \end{pmatrix}.$$

Nous considérons un domaine extérieur Ω de $\mathbb{R}^2$ de régularité quelconque, dont le complémentaire est contenu dans la boule B_{R_0} avec $R_0 > 0$. Introduisons de plus une fonction $g \in L^1_{loc}([0,+\infty[)$ nulle sur l'intervalle $[0, R_0]$ et posons :

$$\forall t \geq 0, \qquad G(t) = \int_0^t s g(s) ds. \tag{3.2}$$

Définissons finalement les fonctions sur $\mathbb{R}^2$ (voir aussi J.Y. Chemin [16], Prop. 1.3.2, qui introduit ces fonctions dans le cadre de l'étude des équations stationnaires d'Euler) :

$$\boldsymbol{u}(r,\theta) = \frac{G(r)}{r}\boldsymbol{e}_\theta, \quad \pi(r,\theta) = \int_0^r \frac{G^2(s)}{s^3} ds \ \text{ et } \ \omega(r,\theta) = g(r) \tag{3.3}$$

Nous avons le résultat d'existence suivant :

Proposition 3.1 *Soient* Ω *un domaine extérieur de* $\mathbb{R}^2$*. Les fonctions* $\boldsymbol{u}, \pi$ *et* ω *données par* (3.2) *et* (3.3) *satisfont les relations au sens des distributions :*

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \nu\nabla^{\perp}\omega, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0, \qquad \boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Preuve :

i) Vérifions que tous les termes intervenant dans (3.4) sont des distributions. Comme g est localement intégrable, il est clair que la fonction G donnée par (3.2) est continue sur $[0, +\infty[$. Elle est de plus nulle sur $[0, R_0]$ de sorte que l'intégrale donnant π est toujours finie. Comme c'est l'intégrale d'une fonction continue, π est C^1. Notons finalement que

$$\nabla\boldsymbol{u}(r,\theta) = (g(r) - \frac{G(r)}{r^2})\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\theta, \tag{3.5}$$

de sorte que $\nabla\boldsymbol{u}$ est localement intégrable. En particulier, $\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}$ est le produit d'une fonction continue et d'une fonction localement intégrable, donc clairement une distribution.

ii) Tout d'abord, $\boldsymbol{u}$ est uniformément nulle sur B_{R_0} ; elle est donc nulle au sens classique sur $\partial\Omega \subset B_{R_0}$. D'autre part, un simple calcul en coordonnées polaires montre que

$$\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\pi = (-\frac{1}{r}(\frac{G(r)}{r})^2 + \partial_r\pi)\boldsymbol{e}_r = \mathbf{0},$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} = \frac{1}{r}\partial_r(r\frac{G(r)}{r}) = g(r) = \omega.$$

On en déduit immédiatement le résultat car pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^2)$:

$$\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla^{\perp}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \; + \nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}. \qquad \diamondsuit$$

Remarque 3.2 Il est intéressant de noter que, dans cette construction explicite, $\boldsymbol{u}$ dépend linéairement de ω. La non-linéarité du problème (NS) n'affecte donc que la pression dont l'expression est clairement non-linéaire. De plus, la démonstration précédente établit que $\boldsymbol{u}$ et ω sont liés par les équations linéaires :

$$-\,\Delta\boldsymbol{u} = \nabla^{\perp}\omega \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \tag{3.6}$$

propriété qui nous sera utile par la suite. On notera aussi que le résultat est indépendant de la taille ou du comportement asymptotique de ω.

3.2 Intégrabilité et décroissance des solutions explicites.

Nous étudions maintenant de manière plus fine les propriétés de la solution explicite. Nous considérons pour cela une donnée ω moins générale que dans la proposition précédente. En contrepartie, on sait estimer précisément les propriétés d'intégrabilité et de décroissance à l'infini de la solution.

Soit comme précédemment $g \in L^1_{loc}([0,+\infty[)$ nulle sur $[0, R_0]$. Nous supposons de plus que la fonction $\omega(r,\theta) = g(r)$ vérifie

$$\omega \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^2), \qquad \alpha \geq 0 \tag{3.7}$$

Remarquons, avant d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, que comme R_0 est fixé *a priori*, on obtient très simplement l'équivalence des normes

$$\| \omega \|_{L^2_\alpha} \sim (\int_{R_0}^{+\infty} s^{2\alpha+1} |g(s)|^2 ds)^{1/2}, \tag{3.8}$$

de sorte que (3.7) traduit la propriété suivante :

$$\int_{R_0}^{+\infty} s^{2\alpha+1} |g(s)|^2 ds < +\infty. \tag{3.9}$$

Nous allons démontrer le

Théorème 3.3 *Soient $\omega \in L^2_\alpha$, $\alpha \geq 0$ et $(\boldsymbol{u}, \pi)$ la solution du problème (3.4) donnée par la Proposition 3.1. Alors, $\boldsymbol{u}$ est une solution d'énergie finie telle que $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{1,2}_0(\Omega)$. Elle vérifie l'égalité d'énergie :*

$$\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 d\boldsymbol{x} = < \nabla^\perp \omega, \boldsymbol{u} >_{\mathbf{W}^{-1,2}_0(\Omega) \times \mathring{\mathbf{W}}^{1,2}_0(\Omega)} . \tag{3.10}$$

Si $\alpha \in [0,1[$ ou bien si $\alpha \in]1,2[$ et $\int_0^{+\infty} sg(s)ds = 0$, alors on a, de plus, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{1,2}_\alpha(\Omega)$ avec

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}^{1,2}_\alpha} \leq C \| \omega \|_{L^2_\alpha} \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = O(r^{-\alpha}),$$

où la constante $C > 0$ ne dépend que de R_0 et α.

Nous commençons par obtenir des informations à partir de l'expression explicite (3.3) de $\boldsymbol{u}$. Ceci nécessite en particulier d'étudier les propriétés de la fonction G donnée par (3.2). C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 3.4 *Soit g une fonction localement intégrable sur $]0, +\infty[$ et nulle sur l'intervalle $]0, R_0[$. Si $\alpha \in [0,2[$ et g vérifie (3.9), alors la fonction G donnée par (3.2)* *satisfait :*

$$|G(r)| \leq C\|\,\omega\,\|_{L^2_\alpha}\, r^{1-\alpha} \qquad si\ \alpha \in [0,1[, \tag{3.11}$$

$$|G(r)| \leq C\|\,\omega\,\|_{L^2_1}\, (\ln r)^{1/2} \qquad si\ \alpha = 1, \tag{3.12}$$

$$|G(r) - G_\infty| \leq C\|\,\omega\,\|_{L^2_\alpha}\, r^{1-\alpha} \quad si\ \alpha \in]1,2[, \tag{3.13}$$

où G_∞ désigne l'intégrale

$$G_\infty = \int_0^{+\infty} sg(s)ds. \tag{3.14}$$

Preuve :

i) Si $r > R_0$ et $\alpha \in [0,1]$, on a grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|G(r)| \leq (\int_{R_0}^r s^{2\alpha+1}|g(s)|^2 ds)^{1/2}(\int_{R_0}^r s^{1-2\alpha}ds)^{1/2}. \tag{3.15}$$

La première intégrale est contrôlée par $\|\,\omega\,\|_{L^2_\alpha}$ d'après (3.8). La seconde est dominée par $r^{2-2\alpha}$ si $\alpha < 1$ et par $\ln r$ si $\alpha = 1$. D'où les inégalités (3.11) et (3.12).

ii) Soit $\alpha > 1$, l'inegalité de Cauchy-Schwarz montre que :

$$\int_0^{+\infty} |sg(s)|ds \leq (\int_{R_0}^{+\infty} s^{2\alpha+1}|g(s)|^2 ds)^{1/2}(\int_{R_0}^{+\infty} s^{1-2\alpha}ds)^{1/2} < +\infty, \tag{3.16}$$

soit $sg(s) \in L^1(]0,+\infty[)$. Ainsi, la quantité G_∞ donnée par (3.14) a un sens. De plus,

$$|G(r) - G_\infty| = |\int_r^{+\infty} sg(s)ds\,| \leq (\int_r^{+\infty} s^{2\alpha+1}|g(s)|^2 ds)^{1/2}(\int_r^{+\infty} s^{1-2\alpha}ds)^{1/2},$$

grâce à l'inegalité de Cauchy-Schwarz. L'inégalité (3.13) en résulte après des majorations évidentes. $\diamondsuit$

La proposition suivante est une conséquence immédiate du Lemme 3.4 et établit en particulier les propriétés asymptotiques énoncées dans le Théorème 3.3.

Proposition 3.5 *Soient $\omega \in L^2_\alpha$, $\alpha \geq 0$ et $(\boldsymbol{u}, \pi)$ la solution du problème* (3.4) *donnée par la Proposition 3.1. Alors,*

$$|\boldsymbol{u}(r,\theta)| \leq C\|\,\omega\,\|_{L^2_\alpha}\, r^{-\alpha} \qquad si\ \ \alpha \in [0,1[, \tag{3.17}$$

$$|\boldsymbol{u}(r,\theta)| \leq C\|\,\omega\,\|_{L^2_1}\, \frac{(\ln r)^{1/2}}{r} \qquad si\ \ \alpha = 1, \tag{3.18}$$

$$|\boldsymbol{u}(r,\theta) - \frac{G_\infty}{r}\boldsymbol{e}_\theta| \leq C\|\,\omega\,\|_{L^2_\alpha}\, r^{-\alpha} \quad si\ \ \alpha \in]1,2[. \tag{3.19}$$

Grâce à ce résultat nous sommes en mesure de donner la

Preuve du Théorème 3.3 : Nous traitons tout d'abord le cas $\alpha = 0$ et en déduisons l'égalité d'énergie (3.10). Nous établissons ensuite les propriétés d'intégrabilité supplémentaires lorque $\alpha > 0$.

i) Soit $\alpha = 0$. Notons tout d'abord que (3.17) entraîne l'inégalité :

$$\| \frac{\boldsymbol{u}}{\rho \ln \rho} \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C \| \omega \|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.20}$$

De plus, on a par hypothèse $\omega \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et par suite $\nabla^\perp \omega \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^2)$. En outre, comme $\boldsymbol{\mathcal{P}}_0 \subset \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, on vérifie grâce à la densité de $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ que

$$\nabla^\perp \omega \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^2) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0.$$

Rappelons alors que $\boldsymbol{u}$ satisfait la relation (3.6). Par ailleurs, l'isomorphisme (I.2.5) avec $p = n = 2$ et $l = 0$ montre qu'il existe $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ tel que

$$-\Delta \boldsymbol{v} = \nabla^\perp \omega \;\; \text{dans } \mathbb{R}^2. \tag{3.21}$$

Ainsi, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ est une distribution tempérée harmonique, soit un polynôme dont on sait de plus majorer le degré car, grâce à (3.20),

$$\frac{\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}}{\rho \ln \rho} \in L^2(\Omega).$$

Il vient alors $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_0 \subset \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ et par conséquent

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^2). \tag{3.22}$$

Finalement, on déduit de (3.6) et de la densité de $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ que

$$< \nabla^\perp \omega, \boldsymbol{u} >_{\mathbf{W}_0^{-1,2} \times \mathbf{W}_0^{1,2}} = - < \Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} >_{\mathbf{W}_0^{-1,2} \times \mathbf{W}_0^{1,2}} = < \nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u} >_{L^2 \times L^2},$$

soit l'égalité d'énergie (3.10). Celle-ci entraîne, grâce au Théorème II.2.1, l'estimation :

$$\| \nabla \boldsymbol{u} \|_{L^2(\Omega)} \leq C \| \omega \|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.23}$$

qui, avec (3.20), établit l'estimation annoncée dans le théorème.

ii) Pour $\alpha \in]0,1[$, l'égalité d'énergie découle du point (*i*) et de l'inclusion continue $L^2_\alpha(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$. D'autre part, $\nabla^\perp \omega \in \mathbf{W}_\alpha^{-1,2}(\mathbb{R}^2)$ et $\boldsymbol{\mathcal{P}}_0 \subset \mathbf{W}_{-\alpha}^{1,2}(\mathbb{R}^2)$; on obtient donc comme au point précédent que

$$\nabla^\perp \omega \in \mathbf{W}_\alpha^{-1,2}(\mathbb{R}^2) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0.$$

La Proposition I.4.6 ($p = n = 2$) montre alors que $\boldsymbol{v} = F * \nabla^\perp \omega \in \mathbf{W}_\alpha^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ (où F est la solution élémentaire du Laplacien) avec

$$\| \boldsymbol{v} \|_{W_\alpha^{1,2}} \le C \| \nabla^\perp \omega \|_{\mathbf{W}_\alpha^{-1,2}} \le C \| \omega \|_{L_\alpha^2}.$$

En particulier, $\boldsymbol{v}$ vérifie clairement (3.21) de sorte que $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ est un polynôme. La Proposition I.3.8 d'une part et la Proposition 3.5 d'autre part permettent d'obtenir :

$$\| (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})(r, .) \|_{L^2(\Sigma)} = O(r^{-\alpha}).$$

On en déduit que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, d'où la conclusion.

iii) Soit finalement $\alpha \in]1, 2[$. Nous utilisons dans ce cas une approche différente. Soit g vérifiant (3.9) et $\int_0^{+\infty} sg(s)ds = 0$, intégrale qui a un sens comme on l'a vu en démontrant le Lemme 3.4. Compte tenu de (3.3) et (3.5) et grâce à l'équivalence de normes (3.8), il suffit pour montrer que $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_\alpha^{1,2}(\Omega)$ et l'estimation correspondante, d'établir l'inégalité :

$$\int_{R_0}^{+\infty} s^{2\alpha-3} |G(s)|^2 ds \le C \int_{R_0}^{+\infty} s^{2\alpha+1} |g(s)|^2 ds = C \int_{R_0}^{+\infty} s^{2\alpha-1} |sg(s)|^2 ds. \tag{3.24}$$

Pour cela, nous introduisons (grâce à un argument standard de troncature et régularisation) une suite $g_k \in \mathcal{D}(]\frac{R_0}{2}, +\infty[)$, telle que

$$\int_{R_0/2}^{+\infty} s^{2\alpha+1} |g_k(s) - g(s)|^2 ds \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.25}$$

Nous posons pour tout $k \ge 0$,

$$g_k^0 = g_k - (\int_{R_0/2}^{+\infty} sg_k(s)ds)\psi, \qquad G_k(t) = \int_{R_0/2}^{t} sg_k^0(s)ds,$$

où la fonction $\psi \in \mathcal{D}(]\frac{R_0}{2}, +\infty[)$ vérifie $\int_{R_0/2}^{+\infty} s\psi(s)ds = 1$. De même que l'on a obtenu (3.16), il vient :

$$\int_{R_0/2}^{+\infty} sg_k(s)ds \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{R_0/2}^{+\infty} sg(s)ds = 0.$$

On en déduit avec (3.25) que

$$\int_{R_0/2}^{+\infty} s^{2\alpha+1} |g_k^0(s) - g(s)|^2 ds \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.26}$$

puis que G_k converge uniformément vers G sur $]R_0/2, +\infty[$. De plus, on vérifie aisément que $\int_{R_0/2}^{+\infty} sg_k^0(s)ds = 0$ de sorte que

$$G_k(s) = -\int_s^{+\infty} tg_k^0(t)dt.$$

Mais, grâce à l'inégalité de Hardy (voir par exemple, [5] lemme 3.1, $p = 2$, $\beta = 2\alpha - 3$), on a l'estimation *a priori* pour toute fonction f mesurable :

$$\int_{R_0/2}^{+\infty} s^{2\alpha-3} \left| \int_s^{+\infty} f(t)dt \right|^2 ds \leq C \int_{R_0/2}^{+\infty} s^{2\alpha-1} |f(s)|^2 \, ds.$$

Cette inégalité, appliquée avec $f(s) = s g_k^0(s)$ et la convergence (3.26) donnent alors (3.24) grâce à un raisonnement standard sur les suites de Cauchy. $\diamondsuit$

Remarque 3.6 La démonstration précédente nous permet de mieux interpréter les hypothèses du Théorème 3.3. Plus précisément, nous avons obtenu les propriétés d'intégrabilité de $\boldsymbol{u}$ à partir de la relation (3.6) et des propriétés de l'opérateur de Laplace dans $\mathbb{R}^2$. A ce titre, on notera que le cas $\alpha = 1$ qui n'est pas envisagé dans le Théorème 3.3 correspond en fait à un cas critique pour l'opérateur de Laplace (*cf.* l'hypothèse (H) au chapitre I). De même, pour $\alpha \in]1, 2[$, la condition $G_\infty = 0$, signifie que ω est d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}^2$, ce qui entraîne que $\nabla^\perp \omega \in \mathbf{W}_\alpha^{-1,2} \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_1$. C'est-à-dire que $\nabla^\perp \omega$ satisfait une condition de compatibilité similaire à celles apparaîssant dans les isomorphismes (I.2.5).

Nous donnons maintenant, pour compléter la description des solutions explicites, des propriétés asymptotiques de la pression π sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 3.3.

Théorème 3.7 *Soit $\omega \in L^2_\alpha$, $\alpha \geq 0$ et $(\boldsymbol{u}, \pi)$ la solution du problème* (3.4) *donnée par la Proposition 3.1. Alors, π vérifie :*

$$0 \leq \pi(r) \leq C \| \omega \|_{L^2}^2 \ln r \quad si \quad \alpha = 0.$$

De plus, si $\alpha > 0$, il existe une constante $\pi_\infty \geq 0$ dépendant de ω telle que

$$|\pi(r) - \pi_\infty| \leq C \| \omega \|_{L^2_\alpha}^2 r^{-2\alpha} \qquad si \quad \alpha \in]0, 1[, \tag{3.27}$$
$$|\pi(r) - \pi_\infty| \leq C \| \omega \|_{L^2_1}^2 r^{-2} \ln r \qquad si \quad \alpha = 1, \tag{3.28}$$
$$|\pi(r) - \pi_\infty| \leq C \, G_\infty^2 r^{-2} \qquad si \quad \alpha \in [1, 2[\ \ et \ G_\infty \neq 0, \tag{3.29}$$
$$|\pi(r) - \pi_\infty| \leq C \| \omega \|_{L^2_\alpha}^2 r^{-2\alpha} \qquad si \quad \alpha \in]1, 2[\ \ et \ G_\infty = 0. \tag{3.30}$$

Preuve : Ces inégalités découlent du Lemme 3.4 et de la formule explicite (3.3). La première est en particulier évidente. Lorsque $\alpha > 0$, les majorations (3.11),(3.12) et (3.13) entraînent clairement que

$$\frac{G^2(s)}{s^3} \in L^1(]R_0, +\infty[),$$

de sorte que

$$\lim_{r\to+\infty}\pi(r) = \int_{R_0}^{+\infty}\frac{G^2(s)}{s^3}ds := \pi_\infty.$$

Il reste maintenant à estimer la différence

$$\pi(r)-\pi_\infty = \int_r^{+\infty}\frac{G^2(s)}{s^3}ds.$$

Lorsque $\alpha\in]0,1[$, l'inégalité (3.27) découle immédiatement de (3.11). De même, (3.28) résulte de (3.12), une fois que l'on a vérifié par intégration par parties que

$$\int_r^{+\infty}\frac{\ln s}{s^3}ds \sim \frac{\ln r}{2r^2}.$$

Enfin, lorsque $\alpha>1$, les inégalités (3.29) et (3.30) se déduisent de l'inégalité suivante :

$$\left|\int_r^{+\infty}\frac{G^2(s)}{s^3}ds\right| \le |G_\infty|^2\int_r^{+\infty}\frac{ds}{s^3} + 2|G_\infty|\int_r^{+\infty}\frac{|G(s)-G_\infty|}{s^3}ds + \\ + \int_r^{+\infty}\frac{|G(s)-G_\infty|^2}{s^3}ds.$$

En effet, lorsque $G_\infty\neq 0$, le premier des termes du second membre est prépondérant et donne la conclusion, tandis que si $G_\infty = 0$, c'est du dernier terme et (3.13) que l'on tire l'estimation. $\diamondsuit$

3.3 Unicité des solutions explicites.

Ce paragraphe est consacré au résultat d'unicité suivant :

Théorème 3.8 *Soient Ω un ouvert extérieur de $\mathbb{R}^2$ et $g\in L^1_{loc}(]0,+\infty[)$ une fonction nulle sur l'intervalle $]0,R_0[$ satisfaisant* (3.9) *avec $\alpha\in]1,2[$ ainsi que $G_\infty = 0$. Soit $(\boldsymbol{u},\pi)$ la solution du problème* (3.4) *donnée par la Proposition 3.1. Alors, il existe une constante $\delta>0$ telle que si*

$$\|\, \boldsymbol{u}\,\|_{\mathbf{W}^{1,2}_\alpha} < \delta,$$

alors $\boldsymbol{u}$ est l'unique solution faible du problème (3.4) *qui vérifie l'inégalité d'energie :*

$$\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}|^2 d\boldsymbol{x} \le \ <\nabla^\perp\omega, \boldsymbol{u}> .$$

Nous n'établissons donc pas l'unicité dans la classe des solutions faibles (comme c'est la cas dans un domaine borné; voir Remarque 1.4) mais dans une classe plus restreinte. La pertinence du résultat tient alors au fait que la classe considérée est déterminée par un critère physique. Signalons par ailleurs que ce type de propriétés d'unicité est très similaire à celles connues en dimension 3 (nous renvoyons le lecteur au chapitre suivant, Théorème IV.3.3 pour plus de détails). En particulier, la preuve de ce résultat fait appel aux mêmes arguments. Nous commençons par un lemme d'approximation de la solution explicite.

Lemme 3.9 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $\boldsymbol{h}(r,\theta) = h(r)\boldsymbol{e}_\theta$ *un champ de vecteurs sur* Ω*, nul sur* B_{R_0} *tel que* $\boldsymbol{h} \in \mathbf{W}^{1,2}_\alpha(\Omega)$*. Alors,* $\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0$*,* $\rho^\alpha \boldsymbol{h} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ *et il existe une suite de champs de vecteurs* $\boldsymbol{h}_m \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$*, telle que :*

$$\boldsymbol{h}_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{h} \quad \textit{dans } \mathbf{W}^{1,2}_\alpha(\Omega) \quad \textit{et} \quad \| \rho^\alpha \boldsymbol{h}_m \|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|\boldsymbol{h}\|_{\mathbf{W}^{1,2}_\alpha}.$$

Preuve :

i) Soit $\boldsymbol{h} = h(r)\boldsymbol{e}_\theta$. Il est tout d'abord évident que $\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0$. D'autre part, comme $\boldsymbol{h} \in \mathbf{W}^{1,2}_\alpha(\Omega)$, on vérifie aisément que $h \in W^{1,1}_{loc}([R_0, +\infty[)$; c'est par conséquent, d'après les injections de Sobolev, une fonction continue. Elle est donc localement bornée avec, de plus, sur tout compact $K \subset [R_0, +\infty[$:

$$\| h \|_{L^\infty(K)} \leq C \|\boldsymbol{h}\|_{\mathbf{W}^{1,2}_\alpha}. \tag{3.31}$$

De plus, la Proposition I.3.8 montre que pour r assez grand :

$$\| \boldsymbol{h}(r,.) \|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|\boldsymbol{h}\|_{\mathbf{W}^{1,2}_\alpha} r^{-\alpha}. \tag{3.32}$$

Mais, par symétrie, il est clair que $\| \boldsymbol{h}(r,.) \|_{L^2(\Sigma)} = (2\pi)^{1/2}|h(r)| = (2\pi)^{1/2}|\boldsymbol{h}(r,\theta)|$. On déduit finalement de (3.31) et (3.32) l'estimation :

$$\| \rho^\alpha \boldsymbol{h} \|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|\boldsymbol{h}\|_{\mathbf{W}^{1,2}_\alpha}. \tag{3.33}$$

ii) Il suffit maintenant de trouver des fonctions $h_m \in \mathcal{D}(]R_0, +\infty[)$ telles que

$$\int_{R_0}^{+\infty} |h_m(r) - h(r)|^2 r^{2\alpha-1} dr + \int_{R_0}^{+\infty} |h'_m(r) - h'(r)|^2 r^{2\alpha+1} dr \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, on pose alors $\boldsymbol{h}_m(r,\theta) = h_m(r)\boldsymbol{e}_\theta$, champ de vecteurs qui appartient à $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ et converge vers $\boldsymbol{h}$ dans $\mathbf{W}^{1,2}_\alpha(\Omega)$. On déduit de plus de cette convergence et de l'inégalité (3.33) appliquée à $\boldsymbol{h}_m$ que

$$\| \rho^\alpha \boldsymbol{h}_m \|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|\boldsymbol{h}\|_{\mathbf{W}^{1,2}_\alpha}.$$

Montrons finalement l'existence de la suite h_m. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi(t) = 0$ si $t \geq R_0 + 2$ et $\psi(t) = 1$ si $t \leq R_0 + 1$. Alors, $h = h\psi + h(1-\psi)$. On approche d'une part le terme $h\psi \in H^1_0(]R_0, R_0+2[)$ grâce à la densité de $\mathcal{D}(]R_0, R_0+2[)$ dans $H^1_0(]R_0, R_0+2[)$. D'autre part, pour le terme $h(1-\psi)$, on introduit la troncature $\varphi \in C^\infty([0,+\infty[)$, décroissante et telle que :

$$\varphi(t) = 1 \ \text{ si } t \leq 1 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = 0 \ \text{ si } t \geq 2.$$

On note $\varphi_k(t) = \varphi(t/k)$ et on désigne par τ_k une suite de noyaux régularisants sur $\mathbb{R}$. On vérifie de manière standard que la suite

$$\tau_m * (\varphi_m h(1-\psi)),$$

appartient, pour m assez grand, à $\mathcal{D}(]R_0, +\infty[)$ et converge vers $h(1-\psi)$ dans la norme adaptée, d'où l'existence de h_m. $\diamondsuit$

Nous donnons maintenant la

Preuve du Théorème 3.8 : Soit $(\boldsymbol{u}, \pi)$ la solution du problème (3.4) donnée par la Proposition 3.1. On sait d'après le Théorème 3.3 que c'est une solution d'énergie finie qui vérifie l'égalité d'énergie (3.10). Considérons $\boldsymbol{v}$ une autre solution faible du même problème vérifiant :

$$\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2 d\boldsymbol{x} \leq \ < \nabla^\perp \omega, \boldsymbol{v} >_{\mathbf{W}_0^{-1,2} \times \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}}, \tag{3.34}$$

et posons $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. Alors, il est clair que

$$\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{w}|^2 d\boldsymbol{x} = \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 d\boldsymbol{x} + \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2 d\boldsymbol{x} - 2\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} . \nabla \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x}.$$

En particulier, grâce à (3.10) et (3.34), on a

$$\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{w}|^2 d\boldsymbol{x} \leq \ < \nabla^\perp \omega, \boldsymbol{u} > + < \nabla^\perp \omega, \boldsymbol{v} > -2\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} . \nabla \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x}. \tag{3.35}$$

Nous allons maintenant calculer la dernière intégrale de deux manières différentes grâce aux formulations variationnelles vérifiées par $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ (voir Définition 1.1).

i) Rappelons que $\boldsymbol{u}(r,\theta) = \frac{G(r)}{r} \boldsymbol{e}_\theta$ et $\boldsymbol{u} \in \mathring{\mathbf{W}}_\alpha^{1,2}(\Omega)$ d'après le Théorème 3.4. Ainsi, il existe, d'après le Lemme 3.9, une suite $\boldsymbol{u}_m \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ telle que

$$\boldsymbol{u}_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{u} \ \text{ dans } \mathring{\mathbf{W}}_\alpha^{1,2}(\Omega) \ \text{ et } \ \| \rho^\alpha \boldsymbol{u}_m \|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}_\alpha^{1,2}}. \tag{3.36}$$

En introduisant $\boldsymbol{u}_m$ dans la formulation variationnelle vérifiée par $\boldsymbol{v}$, il vient

$$\nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{u}_m d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{v} . \boldsymbol{u}_m d\boldsymbol{x} = \nu < \nabla^\perp \omega, \boldsymbol{u}_m > .$$

Il est alors facile de passer à la limite dans la première intégrale et dans le crochet de dualité grâce à la convergence de $\boldsymbol{u}_m$ dans $\mathring{\mathbf{W}}_\alpha^{1,2}(\Omega)$ -espace qui s'injecte continûment dans $\mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$. Cette convergence implique par ailleurs qu'à extraction d'une sous-suite près, $\boldsymbol{u}_m$ converge presque partout vers $\boldsymbol{u}$ dans Ω. Ainsi, $\boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}_m$ converge presque partout vers $\boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}$ dans Ω et on a, d'après (3.36) :

$$| \boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{v} . \boldsymbol{u}_m | \leq C | \rho^{-\alpha} \boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{v} | \| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}_\alpha^{1,2}}.$$

Or, comme $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ et $\alpha > 1$, il est clair que $\rho^{-\alpha}\boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ et on peut passer à la limite dans la seconde intégrale grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue. On obtient finalement l'égalité :

$$\nu \int_\Omega \nabla\boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{u} = \nu < \nabla^\perp\omega, \boldsymbol{u} > - \int_\Omega \boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x}. \tag{3.37}$$

ii) Nous utilisons maintenant la formulation variationnelle vérifiée par $\boldsymbol{u}$, c'est à dire : pout tout $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$,

$$\nu \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{x} = \nu < \nabla^\perp\omega, \boldsymbol{\varphi} > . \tag{3.38}$$

Comme $\boldsymbol{v} \in \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$ et $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$, le Théorème II.2.4 montre qu'il existe une suite $\boldsymbol{\varphi}_m \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ approchant $\boldsymbol{v}$ dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$. En utilisant (3.38) avec $\boldsymbol{\varphi}_m$, on passe trivialement à la limite dans la première intégrale et dans le crochet de dualité. De plus, comme $\alpha > 1$, il est clair que la convergence de $\boldsymbol{\varphi}_m$ dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ entraine aussi que

$$\rho^{-\alpha}\boldsymbol{\varphi}_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \rho^{-\alpha}\boldsymbol{v} \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \tag{3.39}$$

Notons par ailleurs que, comme $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_\alpha^{1,2}(\Omega)$, le Lemme 3.9 montre que $\rho^\alpha\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$. En particulier, comme $\nabla\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)$, il vient :

$$\rho^\alpha\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega). \tag{3.40}$$

Alors, (3.39) et (3.40) entrainent que

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\varphi}_m d\boldsymbol{x} = \int_\Omega (\rho^\alpha\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}).(\rho^{-\alpha}\boldsymbol{\varphi}_m)d\boldsymbol{x} \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}d\boldsymbol{x}.$$

Ainsi, nous avons établi en passant à la limite, l'égalité :

$$\nu \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{v}d\boldsymbol{x} = \nu < \nabla^\perp\omega, \boldsymbol{v} > - \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}d\boldsymbol{x}. \tag{3.41}$$

En introduisant les relations (3.37) et (3.41) dans (3.35), il vient :

$$\nu \int_\Omega |\nabla\boldsymbol{w}|^2 d\boldsymbol{x} \leq \int_\Omega \boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}d\boldsymbol{x}. \tag{3.42}$$

iii) Remarquons avant de conclure que si $\boldsymbol{u}_m$ désigne l'approximation de $\boldsymbol{u}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ introduite au point (i), alors, pour tout champ de vecteurs $\boldsymbol{h} \in \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}_m.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{h}d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \boldsymbol{u}_m.\nabla\boldsymbol{h}.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x} \quad \text{et} \quad \int_\Omega \boldsymbol{h}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}_m d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \boldsymbol{h}.\nabla\boldsymbol{u}_m.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x},$$

égalités qui découlent des formules de Green. De plus, on peut passer à la limite dans toutes les intégrales en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue comme on l'a déjà fait pour établir (3.37). On obtient alors les égalités :

$$\forall \boldsymbol{h} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_0^{1,2}(\Omega), \quad \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{h}d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{h}.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x} \quad \text{et} \quad \int_\Omega \boldsymbol{h}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x} = 0. \quad (3.43)$$

En appliquant (3.43) avec $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{v}$ ou $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{u}$, on vérifie que l'égalité suivante a lieu :

$$\int_\Omega \boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x} + \\ + \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x}.$$

Mais, le second membre de cette égalité n'est autre qu'une expression développée de $\int_\Omega \boldsymbol{w}.\nabla\boldsymbol{w}.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x}$ et l'inégalité (3.42) s'écrit donc encore :

$$\nu \int_\Omega |\nabla\boldsymbol{w}|^2 d\boldsymbol{x} \leq \int_\Omega \boldsymbol{w}.\nabla\boldsymbol{w}.\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x}. \quad (3.44)$$

iv) Nous sommes maintenant en mesure de conclure. En effet, comme $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ et $\alpha > 1$, on a $\rho^{-\alpha}\boldsymbol{w} \in L^2(\Omega)$ avec

$$\| \rho^{-\alpha}\boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^2} \leq C\| \boldsymbol{w} \|_{W_0^{1,2}} \leq C\| \nabla\boldsymbol{w} \|_{L^2},$$

la dernière inégalité résultant du fait que $\boldsymbol{w}$ est nulle sur $\partial\Omega$ et du Théorème II.2.1. Grâce à l'inégalité de Hölder, on déduit alors aisément de (3.44) et du Lemme 3.9 que

$$\nu\| \nabla\boldsymbol{w} \|_{L^2}^2 \leq \| \rho^{-\alpha}\boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^2}\| \nabla\boldsymbol{w} \|_{L^2}\| \rho^{\alpha}\boldsymbol{u} \|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\| \nabla\boldsymbol{w} \|_{L^2}^2\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}_\alpha^{1,2}}.$$

Cette inégalité montre finalement que $\nabla\boldsymbol{w}$ est nul si $\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}_\alpha^{1,2}} < \nu/C$. Alors, il existe un vecteur constant $\mathbf{c}$ telle que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \mathbf{c}$. Mais $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ étant toutes deux nulles sur $\partial\Omega$, il vient finalement $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, ce qui établit l'unicité. $\diamondsuit$

Annexe : Unicité des solutions faibles en dimension 4

Considérons un domaine extérieur lipschitzien $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ ou $\Omega = \mathbb{R}^4$. Une adaptation sans difficultés du Théorème 1.2 permet d'établir, pour tout $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$, l'existence d'une solution faible $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ pour le problème (NS) qui vérifie de plus :

$$\nu \| \nabla \boldsymbol{u} \|_{L^2(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)}. \tag{3.45}$$

On montre de même que $\pi \in L^2(\Omega_R)$ pour tout $R \geq R_0$.

Contrairement au cas des dimensions 2 et 3, où l'on dispose seulement de résultats très partiels sur l'unicité des solutions faibles, nous allons montrer que, dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$, les solutions faibles d'énergie petite sont uniques puis la dépendance continue des solutions vis-à-vis des données. Plus précisément, grâce au Théorème II.2.1 (*resp.* Théorème I.1.1, si $\Omega = \mathbb{R}^4$), nous munissons dans toute la suite l'espace $\mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$ (*resp.* $\mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^4)$) de sa norme équivalente $\| \nabla . \|_{L^2(\Omega)}$. De plus, grâce aux injections de Sobolev, on a

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega), \qquad \| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leq C_S \| \nabla \boldsymbol{u} \|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.46}$$

où $C_S > 0$ est la norme d'opérateur de l'injection continue de $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^4(\Omega)$.

Nous commençons par le résultat d'unicité suivant :

Théorème *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ un domaine extérieur lipschitzien ou $\Omega = \mathbb{R}^4$. Soit, de plus, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ une solution faible du problème (NS). Si*

$$\| \nabla \boldsymbol{u} \|_{L^2(\Omega)} < \frac{\nu}{C_S^2}, \tag{3.47}$$

alors, $\boldsymbol{u}$ est unique dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$.

L'argument central de la démonstration de ce résultat est donné par le lemme suivant qui établit des propriétés de continuité et de symétrie de la forme trilinéaire :

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{v}.\boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{x}.$$

Lemme *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ un domaine extérieur lipschitzien ou $\Omega = \mathbb{R}^4$. La forme trilinéaire b est continue sur $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \times \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$. De plus, si $\boldsymbol{u} \in \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$, $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ et $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ alors*

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0. \tag{3.48}$$

Preuve :

i) Grâce à l'inégalité de Hölder et à (3.46), on a:

$$| \, b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \, | \leq \| \boldsymbol{u} \|_{L^4} \| \nabla \boldsymbol{v} \|_{L^2} \| \boldsymbol{w} \|_{L^4} \leq C_S^2 \| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}_0^{1,2}} \| \boldsymbol{v} \|_{\mathbf{W}_0^{1,2}} \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}_0^{1,2}},$$

ce qui établit la continuité de b.

ii) Supposons de plus que $\boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_0^{1,2}(\Omega)$ et $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$. Il existe d'après le Théorème II.2.4 (*resp.* Théorème I.2.1 si $\Omega = \mathbb{R}^4$), une suite $\boldsymbol{u}_m \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ avec $\operatorname{div} \boldsymbol{u}_m = 0$ telle que

$$\boldsymbol{u}_m \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{u} \quad \text{dans } \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega).$$

Avec les formules de Green, il est alors facile de vérifier que pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$,

$$b(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = -b(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}),$$

et donc que $b(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$. En passant à la limite, grâce à la continuité établie au point (i), il vient ainsi $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$. $\diamondsuit$

Preuve de l'unicité : Soient $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ deux solutions faibles du problème (NS). Posons $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_0^{1,2}(\Omega)$ et soustrayons membre à membre les formulations variationnelles satisfaites par $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ (voir Définition 1.1); on obtient tout champ de vecteurs $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$:

$$\nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{w}.\boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{w}.\boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{u}.\boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x}. \tag{3.49}$$

Grâce au lemme précédent, et par densité de $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ dans $\overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_0^{1,2}(\Omega)$ (Théorème II.2.4 ou I.2.1), cette égalité a lieu pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_0^{1,2}(\Omega)$. En particulier, pour $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{w}$, il vient en utilisant (3.48) :

$$\nu \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{w}|^2 d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{u}.\boldsymbol{w} d\boldsymbol{x}.$$

L'inégalité de Hölder et (3.46) donnent de plus :

$$\nu \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{w}|^2 d\boldsymbol{x} \leq \| \nabla \boldsymbol{u} \|_{L^2} \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^4}^2 \leq C_S^2 \| \nabla \boldsymbol{u} \|_{L^2} \| \nabla \boldsymbol{w} \|_{L^2}^2.$$

Cette inégalité et l'hypothèse (3.47) entraînent clairement que $\nabla \boldsymbol{w}$ est nul ainsi que $\boldsymbol{w}$, ce qui prouve l'unicité de $\boldsymbol{u}$. $\diamondsuit$

On déduit directement de l'estimation (3.45) et du théorème d'unicité le

Corollaire *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ un domaine extérieur lipschitzien ou $\Omega = \mathbb{R}^4$ et $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$, telle que*

$$\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}} < \frac{\nu^2}{C_S^2}, \tag{3.50}$$

Alors, le problème (NS) admet, dans $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$, une unique solution faible.

Nous établissons alors la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Corollaire *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ *un domaine extérieur lipschitzien ou* $\Omega = \mathbb{R}^4$*. Soient aussi* $\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{f}^2 \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ *telles que*

$$\max(\| \boldsymbol{f}^1 \|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}}, \| \boldsymbol{f}^2 \|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}}) < \frac{\nu^2}{C_S^2},$$

et $\boldsymbol{u}^i$ *l'unique solution faible dans* $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ *du problème* (NS) *avec* $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^i$*. Etant donné* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que :*

$$\| \boldsymbol{f}^1 - \boldsymbol{f}^2 \|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}} < \delta \qquad \Rightarrow \| \nabla(\boldsymbol{u}^1 - \boldsymbol{u}^2) \|_{L^2} < \varepsilon.$$

Preuve : Posons $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^1 - \boldsymbol{u}^2$; alors, en soustrayant membre à membre les formulations variationnelles satisfaites par $\boldsymbol{u}^1$ et $\boldsymbol{u}^2$, on obtient : pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$:

$$\nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} = < \boldsymbol{f}^1 - \boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{\varphi} > + \int_\Omega \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{u}^1.\boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^4} \boldsymbol{u}^2.\nabla \boldsymbol{w}.\boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} .$$

De plus, comme dans la preuve de l'unicité, on peut par densité substituer $\boldsymbol{w}$ à $\boldsymbol{\varphi}$ dans l'égalité précédente, ce qui donne grâce à la symétrie de b :

$$\nu \| \nabla \boldsymbol{w} \|_{L^2}^2 = < \boldsymbol{f}^1 - \boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{w} > + \int_\Omega \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{u}^1.\boldsymbol{w} d\boldsymbol{x},$$

puis par continuité de b, l'inégalité :

$$\nu \| \nabla \boldsymbol{w} \|_{L^2}^2 \leq \| \boldsymbol{f}^1 - \boldsymbol{f}^2 \|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}} \| \nabla \boldsymbol{w} \|_{L^2} + C_S^2 \| \nabla \boldsymbol{u}^1 \|_{L^2} \| \nabla \boldsymbol{w} \|_{L^2}^2.$$

Mais, on sait aussi d'après (3.45) que

$$\nu \| \nabla \boldsymbol{u}^1 \|_{L^2} < \frac{\nu^2}{C_S^2}, \quad i.e. \quad \nu - C_S^2 \| \nabla \boldsymbol{u}^1 \|_{L^2} > 0.$$

On en déduit simplement que

$$\| \nabla \boldsymbol{w} \| \leq \frac{\| \boldsymbol{f}^1 - \boldsymbol{f}^2 \|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}}}{\nu - C_S^2 \|\nabla \boldsymbol{u}^1\|_{L^2}},$$

majoration qui établit le résultat. $\diamondsuit$

Remarque : Soit $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$. Avec les arguments utilisés dans les démonstrations précédentes, on peut encore montrer que toute solution faible $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ vérifie l'égalité d'énergie :

$$\int_\Omega | \nabla \boldsymbol{u} |^2 d\boldsymbol{x} = < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} >_{\mathbf{W}_0^{-1,2} \times \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}} .$$

En particulier, on remarquera que les propriétés des solutions faibles en dimension 4 obtenues dans un domaine extérieur sont analogues à celles valables dans un ouvert borné (voir Remarque 1.4 et [66], Ch. II).

Chapitre IV

Méthodes de point fixe et applications

Nous abordons dans ce chapitre le problème (NS) sous un autre point de vue. Nous construisons une solution comme un point fixe de l'application qui, à un couple $(\boldsymbol{v}, \eta)$, associe la solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ du problème de Stokes :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{0}.$$

Une telle approche a par exemple été utilisée sous la forme de résultats de perturbation de la solution nulle, par R. Finn [24] et plus récemment par G.P. Galdi et C.G. Simader dans [28] (voir aussi [25] Sec. IX.9). Signalons aussi l'article de P. Secchi [58] où des résultats sont établis dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Grâce à un cadre fonctionnel adapté, nous obtenons des résultats beaucoup plus généraux qui nous permettent de plus de décrire précisément le comportement asymptotique des solutions. Toutefois, comme dans les travaux cités ci-dessus, nous avons besoin de supposer les données ($\boldsymbol{f}$ ou $1/\nu$ selon le point de vue choisi) suffisamment petites.

Nous traitons ici uniquement le cas tridimensionel ; les techniques utilisées peuvent être adaptées aux dimensions supérieures mais pas à la dimension 2.

1 Notations et principaux résultats

Dans ce chapitre, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ désigne un domaine extérieur $C^{1,1}$ comme introduit au Chapitre II. On suppose toujours que l'origine est contenue dans Ω' et $R_0 > 0$ désigne à nouveau un réel tel que $\Omega' \subset B_{R_0}$.

Les fonctions et distributions homogènes jouent un rôle important dans les considérations qui suivent. Rappelons en particulier qu'une distribution homogène de degré γ sur $\mathbb{R}^3$ est une distribution T telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3),\ \forall \lambda > 0, \qquad < T, \varphi(\frac{\cdot}{\lambda}) > = \lambda^{\gamma+3} < T, \varphi > . \tag{1.1}$$

Lorsque $\gamma > -3$, on peut par exemple définir une telle distribution en se donnant une fonction h_Σ intégrable sur la sphère unité Σ et en identifiant T à la fonction h donnée par :

$$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \quad h(\boldsymbol{x}) = h_\Sigma(\boldsymbol{x}')|\,\boldsymbol{x}\,|^\gamma, \tag{1.2}$$

où $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$. Réciproquement, toute fonction homogène $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 - \{\boldsymbol{0}\})$ peut s'écrire sous la forme (1.2) avec $h_\Sigma \in L^1(\Sigma)$ et $\gamma \in \mathbb{R}$. Nous introduisons plus généralement les espaces des fonctions homogènes suivants donnés pour $\gamma \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{M}^m_\gamma = \{h(\boldsymbol{x}) = h_\Sigma(\boldsymbol{x}')|\boldsymbol{x}|^\gamma,\ \ \forall 0 \leq k \leq m,\ \nabla^k h \in L^\infty(\Sigma)\}, \tag{1.3}$$

qui sont clairement des espaces de Banach pour les normes :

$$\|\, h \,\|_{\mathcal{M}^m_\gamma} = \sum_{k=0}^{m} \|\, \nabla^k h \,\|_{L^\infty(\Sigma)}.$$

En tant qu'espaces de fonctions sur $\mathbb{R}^3$, ce sont des espaces de distributions pour $\gamma > -3$. En tant qu'espaces de fonctions sur Ω (avec les mêmes notations et la même norme), ce sont des distributions pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$.

Soit un réel $p > 3$. Nous allons établir pour des données adéquates l'existence et l'unicité d'une solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ du problème (NS) avec

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) = \{\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \ \ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1},\ \boldsymbol{w} \in \mathbf{W}^{1,p}_2(\Omega)\,\} \tag{1.4}$$

$$\pi \in \mathcal{Q}^p(\Omega) = \{\pi = \eta + \tau, \ \ \eta \in \mathcal{M}^0_{-2}, \tau \in L^p_2(\Omega)\}. \tag{1.5}$$

Remarquons dès à présent que les décompositions $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ et $\pi = \eta + \tau$ introduites dans ces espaces sont uniques. En ce qui concerne $\boldsymbol{u}$, c'est une conséquence élémentaire des estimations pour r assez grand (*cf.* Proposition I.3.9 pour $\boldsymbol{w}$) :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_\Sigma(\boldsymbol{x}')r^{-1}, \qquad \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = o(r^{-1-3/p}). \tag{1.6}$$

L'unicité de la décomposition de π repose de même sur le fait que $L^p_2(\Omega) \cap \mathcal{M}^0_{-2} = \{0\}$ qui découle d'un argument évident d'intégration. Il est alors clair que les quantités :

$$\|\, \boldsymbol{u} \,\|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p} = \|\, \boldsymbol{v} \,\|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} + \|\, \boldsymbol{w} \,\|_{\mathbf{W}^{1,p}_2} \qquad \|\, \pi \,\|_{\mathcal{Q}^p} = \|\, \eta \,\|_{\mathcal{M}^0_{-2}} + \|\, \tau \,\|_{L^p_2} \tag{1.7}$$

définissent des normes sur $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$ et $\mathcal{Q}^p(\Omega)$ et les munissent, en outre, d'une structure d'espace de Banach.

D'autre part, comme $\overline{\Omega}$ ne contient pas l'origine, il est clair que les fonctions de $\mathcal{M}^1_{-1}$ sont bornées ainsi que leur gradient sur Ω. Ceci entraîne en particulier que

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \subset \mathbf{W}^{1,p}(\Omega_R), \quad \forall R \geq R_0.$$

Comme $p > 3$, on en déduit d'une part que

$$\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega), \qquad \boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\Omega).$$

D'autre part, le domaine Ω étant toujours lipschtizien, chaque $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$ admet une trace $\gamma\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème qui synthétise les principaux résultats de ce chapitre.

Théorème 1.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine extérieur $C^{1,1}$, $p > 3$ et $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}_2(\Omega)$. Il existe une constante $A = A(\nu, p, \Omega) > 0$ telle que si*

$$\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_2} < A,$$

on a les conlusions suivantes :

i) il existe une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \eta + \tau) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ du problème (NS). Celle-ci satisfait de plus l'estimation :

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)} + \| \pi \|_{\mathcal{Q}^p(\Omega)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_2(\Omega)},$$

où $C > 0$ ne dépend que de p, ν et Ω.

ii) Cette solution est d'énergie finie et vérifie l'égalité d'énergie :

$$\nu \int_\Omega | \nabla \boldsymbol{u} |^2 = < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} > .$$

iii) La solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ est unique dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$.

iv) Le couple $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ satisfait le système :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla\eta = \mathbf{F}\delta, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \tag{1.8}$$

où δ est la mesure de Dirac et $\mathbf{F}$ désigne la force totale exercée sur le fluide. De plus, $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ si et seulement si $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Rappelons que la décomposition $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$ est en-soi un développement asymptotique de $\boldsymbol{u}$ (voir (1.6)) dont le terme prépondérant est la partie homogène $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}$ (si $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$). La décroissance du reste $\boldsymbol{w}$ est liée à p et le point (iv) du Théorème 1.1 permet de caractériser $\boldsymbol{v}$. La décomposition de π dans $\mathcal{Q}^p(\Omega)$ ne fournit en revanche pas de développement asymptotique. Nous établirons cependant une telle propriété pour des données plus régulières. Quant au vecteur force totale $\mathbf{F}$, il est donné lorsque $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}$ et π sont assez régulières par la quantité :

$$\int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} (\nabla \boldsymbol{u} - \pi I)\boldsymbol{n}ds,$$

et nous verrons, dans la section 5, quel sens donner à ce vecteur dans le cas général.

Remarque 1.2 Le Théorème 1.1 améliore, à notre connaissance, les propriétés asymptotiques connues pour les solutions du problème (NS) dans un domaine extérieur. Par exemple, G.P. Galdi et C.G. Simader ont établi, dans [28], l'existence d'une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ du problème (NS) vérifiant $(1 + |\boldsymbol{x}|)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, $\pi \in L^q(\Omega)$, $q > 3/2$, pour des données $\boldsymbol{f}$ de la forme

$$\boldsymbol{f} = \operatorname{div} G, \quad (1 + |\,\boldsymbol{x}\,|^2)G(\boldsymbol{x}) \in (L^\infty(\Omega))^{3\times 3},$$

avec une condition de petitesse sur G. Ce résultat est complété dans [25](section IX.9, pp. 140-149) par des formules de représentation asymptotiques lorsque $\boldsymbol{f}$ est de plus dans un espace L^s avec un support compact (*cf.* [25], Th. IX.9.2, IX.9.6) :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x})\mathbf{F} + \int_\Omega U(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).(\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u})(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}), \quad \pi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{x}).\mathbf{F} + \sigma'(\boldsymbol{x}). \quad (1.9)$$

Ici, $(U, \mathbf{Q})$ désigne la solution élémentaire du problème de Stokes (voir Section I.4) et $\mathbf{F}$ désigne la force totale exercée sur le fluide. Par ailleurs, le terme intégral est en $O(r^{-1})$ à l'infini, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = O(r^{-2})$ et $\sigma'(\boldsymbol{x}) = O(r^{-2}\ln r)$. A ce stade, G.P. Galdi s'interroge sur la possibilité de montrer que les termes $U\mathbf{F}$ et $\mathbf{Q}.\mathbf{F}$ sont prépondérants à l'infini dans ces expressions ([25], rem. IX.9.2, p. 145, rem. IX.9.5, p. 147). Le point (iv) du Théorème 1.1 nous permet d'apporter une réponse négative à cette question.

En effet, lorsque $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, $p > 3$ est à support compact, on a $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)$, de sorte que la solution obtenue par G.P. Galdi et celle donnée par le Théorème 1.1 coïncident (on remarque pour cela que lorsque $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ alors on a $(1 + |\boldsymbol{x}|)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ et $\pi \in L^q(\Omega)$, $q > 3/2$). Supposons alors par l'absurde que $U\mathbf{F}$ et $\mathbf{Q}.\mathbf{F}$ sont prépondérants. Comme $U \in \mathcal{M}^1_{-1}$ et $\mathbf{Q} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^0_{-2}$, on obtient par unicité de la décomposition dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ que $\boldsymbol{v} = U.\mathbf{F}$ et $\eta = \mathbf{Q}.\mathbf{F}$. Mais, un calcul élémentaire, bien que fastidieux, montre alors que les relations (1.8) ne peuvent pas être satisfaites.

On notera finalement que le Théorème 1.1 permet d'obtenir un développement asymptotique de la vitesse pour des données beaucoup plus générales que celles utilisées par G.P. Galdi. En particulier, nous n'effectuons aucune restriction sur le support de $\boldsymbol{f}$ et nous n'avons pas besoin de supposer que ce soit une fonction mais seulement une distribution dans $\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)$ avec $p > 3$.

Le plan de ce chapitre suit essentiellement celui du Théorème 1.1. Toutefois, la démonstration du point (iv) nous amènera à étudier le problème (NS) posé dans $\mathbb{R}^3$. Nous établirons alors dans ce cas des résultats plus généraux. Enfin, nous terminerons le chapitre avec des propriétés de régularité et de comportement asymptotique précisées pour des données plus régulières.

2 Existence de solutions

2.1 Le cadre abstrait

Le lemme suivant fournit le cadre abstrait qui va nous permettre, à plusieurs reprises, d'établir l'existence de solutions du problème (NS).

Lemme 2.1 *Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé quelconque, $B : E \times E \longrightarrow F$, une application bilinéaire continue et $L : F \longrightarrow E$ une application linéaire continue. Soient M_B (resp. M_L) la norme de B (resp. L) et $y \in F$ tels que*

$$\| y \|_F < \frac{1}{4M_L^2 M_B}. \tag{2.1}$$

Alors, le schéma d'approximation

$$x_0 = 0, \quad et \quad x_m = Ly + L(B(x_{m-1}, x_{m-1})) = A(x_{m-1}), \tag{2.2}$$

converge dans E vers une solution x de l'équation :

$$x = Ly + L(B(x, x)), \tag{2.3}$$

qui vérifie de plus : $\| x \|_E \leq 2M_L \| y \|_F$.

Preuve : On va montrer que l'application A de E dans E donnée par :

$$Ax = Ly + L(B(x, x)), \tag{2.4}$$

restreinte à la boule $\mathcal{B}_y = \{x \in E, \| x \|_E \leq R(y)\}$ avec

$$R(y) = \frac{1}{2M_L M_B}(1 - \sqrt{1 - 4M_B M_L^2 \| y \|_F},$$

est une contraction de $\mathcal{B}_y$ dans elle-même. Le théorème de point fixe de Banach entraîne alors la convergence du schéma vers $x \in \mathcal{B}_y$ solution de (2.3). De plus, l'inégalité élémentaire $\forall t \in [0,1],\ 1 - \sqrt{1-t} \leq t$ montre que $R(y) \leq 2M_L \| y \|_F$, d'où l'estimation.

Comme $R(y)$ vérifie l'égalité :

$$R(y) = M_L \| y \|_F + M_L M_B R(y)^2,$$

les continuités de L et B entrainent que $A(\mathcal{B}_y) \subset \mathcal{B}_y$. De plus, si x et x' sont deux éléments de $\mathcal{B}_y$, on a

$$\begin{aligned} \| Ax - Ax' \|_E &\leq \| L(B(x - x', x)) \|_E + \| L(B(x', x - x')) \|_E, \\ &\leq (1 - \sqrt{1 - 4M_B M_L^2 \| y \|_F}) \| x - x' \|_E. \end{aligned}$$

Ainsi, il est clair, grâce à (2.1), que la restriction de A à la boule $\mathcal{B}_y$ est une contraction à valeurs dans $\mathcal{B}_y$. $\diamondsuit$

2.2 Application aux équations de Navier-Stokes

Commençons par une approche formelle. On introduit l'application bilinéaire

$$B((\boldsymbol{u}, \pi), (\boldsymbol{u}', \pi')) = -\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}'), \tag{2.5}$$

que l'on notera plus simplement $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')$, et l'application :

$$L\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{u}, \pi) / \quad -\nu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla \pi = \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \;\text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{0}, \tag{2.6}$$

dont nous préciserons le sens le moment venu. Rappelons aussi que si $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ alors on a (au moins pour $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}'$ suffisament régulières)

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = -\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}') = -\boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u}'.$$

Le schéma d'approximation (2.2) s'écrit donc $(\boldsymbol{u}_0, \pi_0) = (\boldsymbol{0}, 0)$ et

$$-\nu \Delta \boldsymbol{u}_{m+1} + \nabla \pi_{m+1} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}_m.\nabla \boldsymbol{u}_m, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_{m+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{u}_{m+1} = \boldsymbol{0} \qquad \text{sur } \partial\Omega. \tag{2.8}$$

Pour démontrer le point (i) du Théorème 1.1, nous avons besoin d'introduire les espaces :

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega) \;= \{\, \boldsymbol{z} \in \mathcal{M}^1_{-2}, \;\; (\operatorname{div} \boldsymbol{z})_{|\Omega} = 0 \,\}, \tag{2.9}$$

et

$$\widetilde{\mathcal{M}}^0_{-3}(\Omega) = \{\, (\operatorname{div} \boldsymbol{z})_{|\Omega}, \;\; \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2}(\mathbb{R}^3) \,\}, \tag{2.10}$$

ce dernier étant muni de la norme

$$\| \operatorname{div} \boldsymbol{z} \|_{\widetilde{\mathcal{M}}^0_{-3}(\Omega)} = \inf_{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega)} \| \boldsymbol{z} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2}}. \tag{2.11}$$

Nous posons alors

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega) = \{\, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{g}, \;\; \boldsymbol{h} \in \widetilde{\mathcal{M}}^0_{-3}(\Omega), \;\; \boldsymbol{g} \in \mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega) \,\}. \tag{2.12}$$

Comme $\widetilde{\mathcal{M}}^0_{-3}(\Omega) \cap \mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega) = \{\mathbf{0}\}$, la décomposition $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{g}$ est unique, ce qui permet d'introduire la norme

$$\| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)} = \| \boldsymbol{h} \|_{\widetilde{\mathcal{M}}^0_{-3}(\Omega)} + \| \boldsymbol{g} \|_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)}.$$

Nous allons maintenant démontrer que l'on peut appliquer le Lemme 2.1 avec

$$E = \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega), \quad F = \boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega).$$

Continuité de l'application bilinéaire

Lemme 2.2 *L'application bilinéaire B donnée par* (2.5) *est continue de* $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$ *dans* $\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$.

Preuve : Soient $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$ et leurs décompositions naturelles dans cet espace, *i.e.*, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}'$, avec $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}$ et $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in \mathbf{W}_2^{1,p}(\Omega)$. Alors,

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = -\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}') - \operatorname{div}(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}' + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}').$$

i) Les fonctions $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v}'$ sont homogènes de degré -1 de sorte que $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}'$ est homogène de degré -2. De plus, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)$ -espace qui est une algèbre de Banach-. On en déduit aisément que $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}' \in \mathcal{M}^1_{-2}$ avec

$$\| \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}' \|_{\mathcal{M}^1_{-2}} \leq \| \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} \| \boldsymbol{v}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}}.$$

Par conséquent, d'après (2.10) et (2.11), on a $\boldsymbol{h} = -\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}') \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)$ avec, de plus, l'estimation :

$$\| \boldsymbol{h} \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} \| \boldsymbol{v}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} \leq C \| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)} \| \boldsymbol{u}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)}. \tag{2.13}$$

ii) Notons $\boldsymbol{g} = -\operatorname{div}(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}' + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}')$. Alors, comme $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}$, on a

$$\| \rho \boldsymbol{v} \|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} \leq \| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)}, \quad \| \rho \boldsymbol{v}' \|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{v}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} \leq \| \boldsymbol{u}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)}.$$

De même, comme $p > 3$, la Proposition I.3.9 entraîne en particulier que

$$\| \rho \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}_2^{1,p}(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)}.$$

De plus, comme $\mathbf{W}_2^{1,p}(\Omega) \subset \mathbf{L}_1^p(\Omega)$ avec injection continue, on déduit de ces régularités et de l'inégalité de Hölder que

$$\| \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}' \|_{L_2^p(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}_1^p} \| \rho \boldsymbol{v}' \|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}_2^{1,p}} \| \rho \boldsymbol{v}' \|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)} \| \boldsymbol{u}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)},$$

et plus généralement que

$$\| \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}' + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}' \|_{L^p_2(\Omega)} \leq 3 \| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)} \| \boldsymbol{u}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)}. \tag{2.14}$$

Finalement, l'opérateur divergence étant continu de $\mathbf{L}^p_2(\Omega)$ dans $W_2^{-1,p}(\Omega)$, on obtient avec (2.14) :

$$\| \boldsymbol{g} \|_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)} \leq C \| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)} \| \boldsymbol{u}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)}. \tag{2.15}$$

Nous avons ainsi établi que $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$ et les estimations (2.13) et (2.15) prouvent la continuité de B. $\diamondsuit$

Construction de l'application linéaire L : Nous précisons le sens de l'application formelle donnée par (2.6) grâce à la

Proposition 2.3 *Soient Ω un domaine extérieur $C^{1,1}$, $p > 3$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$. Il existe un unique couple $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ tel que*

$$-\nu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla \pi = \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \qquad \boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{0}. \tag{2.16}$$

Il existe de plus une constante $C = C(\nu, p, \Omega)$ telle que :

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)} + \| \pi \|_{\mathcal{Q}^p(\Omega)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)}.$$

La preuve de ce résultat est assez technique, en particulier à cause des distributions homogènes qui interviennent dans les espaces $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$, $\mathcal{Q}^p(\Omega)$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$. Nous commençons par énoncer un résultat préliminaire. Introduisons pour cela les espaces de distributions homogènes sur $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2,\operatorname{div}}(\mathbb{R}^3) = \{ \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2}, \operatorname{div} \boldsymbol{z} = 0 \},$$

et

$$\widetilde{\mathcal{M}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3) = \{ \operatorname{div} \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2}(\mathbb{R}^3) \}, \tag{2.17}$$

$$\| \operatorname{div} \boldsymbol{z} \|_{\widetilde{\mathcal{M}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)} = \inf_{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2,\operatorname{div}}(\mathbb{R}^3)} \| \boldsymbol{z} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2}}. \tag{2.18}$$

Ces derniers ne s'identifient pas aux espaces $\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2,\operatorname{div}}(\Omega)$ et $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)$ donnés respectivement par (2.9) et (2.10). On remarquera par exemple que le champ de vecteurs $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|^3$ vérifie $\operatorname{div} \boldsymbol{z} = 4\pi\delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ où δ est la mesure de Dirac. En particulier, on a

$$\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2,\operatorname{div}}(\Omega), \quad \boldsymbol{z} \notin \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2,\operatorname{div}}(\mathbb{R}^3).$$

Plus généralement, rappelons qu'une distribution homogène T nulle sur une couronne centrée à l'origine vérifie $\operatorname{supp} T \subset \{\mathbf{0}\}$ (c'est une conséquence immédiate de la définition (1.1)). D'autre part, on sait qu'une distribution T telle que $\operatorname{supp} T \subset \{\mathbf{0}\}$ est une combinaison linéaire finie de la mesure de Dirac δ et de ses dérivées (voir L. Schwartz [57], Th. XXXV, p. 100). En outre, il est facile de vérifier avec (1.1) que pour tout $k \geq 0$, les dérivées d'ordre k de δ sont, dans $\mathbb{R}^3$, des distributions homogènes de degré $-3-k$. En particulier, il est clair que si $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega)$, alors $\operatorname{div} \boldsymbol{z}$ est une distribution homogène de degré -3, nulle dans Ω et donc au moins dans une couronne centrée à l'origine. Ainsi, grâce aux arguments précédents, on obtient facilement les relations algébriques :

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3) \subset \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega) = \{\, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2},\ \operatorname{div} \boldsymbol{z} = c\delta, c \in \mathbb{R}\}. \tag{2.19}$$

On a alors le résultat d'existence et d'unicité pour le problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$ à données dans $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)$ (voir en annexe pour une démonstration).

Proposition 2.4 *Soit $\boldsymbol{h} \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)$. Il existe un unique couple $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ tel que :*

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \nabla \eta = \boldsymbol{h}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

De plus, il existe un constante $C = C(\nu) > 0$ telle que :

$$\|\, \boldsymbol{v} \,\|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} + \|\, \eta \,\|_{\mathcal{M}^0_{-2}} \leq C \|\, \boldsymbol{h} \,\|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.20}$$

On en déduit l'analogue dans un domaine extérieur Ω de régularité quelconque. On rappelle que $(U, \mathbf{Q})$ désigne la solution élémentaire du problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$ (voir Chapitre I, Section 4.1). De plus, U (*resp.* $\mathbf{Q}$) étant homogène de degré -1 (*resp.* -2) et $C^\infty(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\})$, on a $U \in \mathcal{M}^1_{-1}$ et $\mathbf{Q} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^0_{-2}$.

Corollaire 2.5 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine extérieur et $\boldsymbol{h} \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)$. Il existe un couple $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ tel que*

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \nabla \eta = \boldsymbol{h}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.21}$$

Ce couple est unique à un terme $(U\mathbf{c}, \mathbf{Q}.\mathbf{c})$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ près et on a l'estimation :

$$\inf_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3} (\|\, \boldsymbol{v} + U\mathbf{c} \,\|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} + \|\, \eta + \mathbf{Q}.\mathbf{c} \,\|_{\mathcal{M}^0_{-2}}) \leq C \|\, \boldsymbol{h} \,\|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)}. \tag{2.22}$$

Preuve :

i) existence : Soit $\boldsymbol{h} \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)$. D'après la définition (2.10), il existe $H \in \mathcal{M}^1_{-2}$ tel que

$$\boldsymbol{h} = (\operatorname{div} H)_{|\Omega}.$$

Nous posons de plus pour tout $G \in \mathcal{M}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega)$:

$$\tilde{\boldsymbol{h}}_G = \operatorname{div}(H + G).$$

Alors, on a $\tilde{\boldsymbol{h}}_G \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)$ et il existe d'après la Proposition 2.4, un unique couple $(\boldsymbol{v}_G, \eta_G) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ tel que

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v}_G + \nabla \eta_G = \tilde{\boldsymbol{h}}_G, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}_G = 0 \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \tag{2.23}$$

$$\| \boldsymbol{v}_G \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} + \| \eta_G \|_{\mathcal{M}^0_{-2}} \leq C \| \tilde{\boldsymbol{h}}_G \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.24}$$

En particulier, il est clair que le couple $(\boldsymbol{v}_G, \eta_G)$ satisfait le système :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v}_G + \nabla \eta_G = \boldsymbol{h}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}_G = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

ce qui établit l'existence d'une solution.

<u>*ii) estimation :*</u> Remarquons tout d'abord que

$$\inf_{G \in \mathcal{M}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega)} \| \tilde{\boldsymbol{h}}_G \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)} \leq \| \boldsymbol{h} \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)}, \tag{2.25}$$

inégalité qui s'obtient en notant que pour tout $G \in \mathcal{M}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega)$, on a

$$\| \tilde{\boldsymbol{h}}_G \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)} = \inf_{\Lambda \in \mathcal{M}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)} \| H + G + \Lambda \|_{\mathcal{M}^1_{-2}} \leq \| H + G \|_{\mathcal{M}^1_{-2}},$$

puis en prenant l'infimum de ces deux quantités lorsque G décrit $\mathcal{M}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega)$. Alors, on déduit de (2.24) et (2.25) que :

$$\inf_{G \in \mathcal{M}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega)} (\| \boldsymbol{v}_G \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} + \| \eta_G \|_{\mathcal{M}^0_{-2}}) \leq C \| \boldsymbol{h} \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)}. \tag{2.26}$$

Mais, grâce à (2.19), on sait aussi que

$$\{ \tilde{\boldsymbol{h}}_G, \ G \in \mathcal{M}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega) \} = \{ \operatorname{div} H + \delta\mathbf{c}, \ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \}.$$

De plus, pour tout $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, le couple $(U\mathbf{c}, \mathbf{Q}.\mathbf{c}) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ vérifie

$$-\nu\Delta(U\mathbf{c}) + \nabla(\mathbf{Q}.\mathbf{c}) = \delta\mathbf{c}, \quad \operatorname{div}(U\mathbf{c}) = 0 \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Rappelant que $(\boldsymbol{v}_0, \eta_0) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ désigne l'unique solution du problème (2.23) avec $G = 0$, on obtient par unicité (*cf.* Proposition 2.4) que

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_0 + U.\mathbf{c}, \quad \eta_G = \eta_0 + \mathbf{Q}.\mathbf{c}, \tag{2.27}$$

ce qui, avec (2.26) établit l'estimation (2.22).

<u>*iii) unicité :*</u> Soient deux solutions $(\boldsymbol{v}, \eta)$, $(\boldsymbol{v}', \eta') \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ du problème (2.21) et posons $(\boldsymbol{v}'', \eta'') = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}', \eta - \eta')$. Alors, il est clair que

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v}'' + \nabla\eta'' = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \eta'' = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

En particulier, $-\nu\Delta\boldsymbol{v}'' + \nabla\eta''$ (*resp.* $\operatorname{div}\eta''$) est une distribution homogène de degré -3 (*resp.* -2) nulle dans une couronne centrée à l'origine. Avec les arguments utilisés pour établir (2.19), on obtient qu'il existe $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v}'' + \nabla\eta'' = \delta\mathbf{c}, \quad \operatorname{div} \eta'' = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),$$

ce qui entraîne, par unicité (voir Proposition 2.4) que $(\boldsymbol{v}'', \eta'') = (U\mathbf{c}, \mathbf{Q}.\mathbf{c})$. $\diamondsuit$

Remarque 2.6 On notera qu'il n'y a pas de condition au bord dans le problème de Stokes considéré dans le Corollaire 2.5. Ce problème est cependant bien posé, ce qui est bien sûr du au fait que l'on cherche des solutions homogènes. Cette restriction forte sur la forme des solutions compense en particulier l'absence de condition au bord.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la

Preuve de la Proposition 2.3 : Nous établissons tout d'abord l'existence d'une solution et sa dépendance continue relativement aux données. Nous terminons ensuite la démonstration en prouvant l'unicité. Soit Ω un domaine extérieur $C^{1,1}$, $p > 3$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{h} \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega), \ \boldsymbol{g} \in \mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega).$$

$i)$ Choisissons, grâce au Corollaire 2.5, un couple $(\boldsymbol{v}^0, \eta^0) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ tel que

$$-\nu\Delta\boldsymbol{v}^0 + \nabla\eta^0 = \boldsymbol{h}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}^0 = 0 \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{2.28}$$

$$\| \boldsymbol{v}^0 \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} + \| \eta^0 \|_{\mathcal{M}^0_{-2}} \leq C \| \boldsymbol{h} \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)}. \tag{2.29}$$

Notons alors $\boldsymbol{\varphi} = \gamma\boldsymbol{v}^0$, la trace de $\boldsymbol{v}^0$ sur $\partial\Omega$. Comme $\boldsymbol{v}^0 \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}$, celle-ci a en particulier un sens dans $\mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$ et vérifie :

$$\| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1/p',p}} \leq C \| \boldsymbol{v}^0 \|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega_{R_0})} \leq C \| \boldsymbol{v}^0 \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}},$$

la dernière inégalité résultant du fait que Ω_{R_0} est borné et de l'inégalité de Hölder. On en déduit finalement avec (2.29) que

$$\| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1/p',p}} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)}. \tag{2.30}$$

ii) D'après le Théorème II.5.1, le problème extérieur de Stokes :

$$- \nu\Delta \boldsymbol{z} + \nabla\theta = \boldsymbol{g}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{z} = 0 \ \text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{z}_{|\partial\Omega} = -\boldsymbol{\varphi}, \tag{2.31}$$

admet une unique solution $\boldsymbol{z} = U\mathbf{F} + \boldsymbol{w}$, $\theta = \mathbf{Q}.\mathbf{F} + \tau$ où le vecteur constant $\mathbf{F}$, donné par (II.5.1) (avec $g = 0$) et $(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}_2^{1,p}(\Omega) \times L_2^p(\Omega)$ vérifient

$$|\mathbf{F}| + \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}_2^{1,p}} + \| \tau \|_{L_2^p} \leq C\| \boldsymbol{g} \|_{\mathbf{W}_2^{-1,p}} + \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1/p',p}}. \tag{2.32}$$

D'où, d'après (2.30),

$$|\mathbf{F}| + \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}_2^{1,p}} + \| \tau \|_{L_2^p} \leq C\| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)}. \tag{2.33}$$

iii) Posons alors :

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v}^0 + U\mathbf{F}) + \boldsymbol{w}, \qquad \pi = (\eta^0 + \mathbf{Q}.\mathbf{F}) + \tau.$$

Il est clair que $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ et en sommant (2.31) et (2.28), il vient :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \ \text{ dans } \Omega, \qquad \boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0}.$$

De plus, (2.29) et (2.33) entraînent que :

$$\| \boldsymbol{v}^0 + U\mathbf{F} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}_{-1}^1} + \| \eta^0 + \mathbf{Q}.\mathbf{F} \|_{\mathcal{M}_{-2}^0} + \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}_2^{1,p}} + \| \tau \|_{L_2^p} \leq C\| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)},$$

soit l'estimation souhaitée.

iv) Il reste à établir l'unicité de la solution. Soient $(\boldsymbol{u}, \pi), (\boldsymbol{u}', \pi')$ deux solutions dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ du même problème de Stokes. Posons

$$\boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}', \quad \pi'' = \pi - \pi',$$

et introduisons les décompositions naturelles $\boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{v}'' + \boldsymbol{w}''$ et $\pi'' = \eta'' + \tau''$ dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$ et $\mathcal{Q}^p(\Omega)$. L'unicité de cette décomposition permet d'établir que :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v}'' + \nabla\eta'' = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}'' = 0 \quad \text{dans } \ \Omega \tag{2.34}$$

$$-\nu\Delta \boldsymbol{w}'' + \nabla\tau'' = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{w}'' = 0 \quad \text{dans } \ \Omega \quad \boldsymbol{w}''_{|\partial\Omega} = -\boldsymbol{v}'' \tag{2.35}$$

Les relations (2.34) et le Corollaire 2.5 entraînent que $(\boldsymbol{v}'', \eta'') = (U.\mathbf{c}, \mathbf{Q}.\mathbf{c})$, pour un vecteur $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Alors, comme $(\boldsymbol{w}'', \tau'') \in \mathbf{W}_2^{1,p}(\Omega) \times L_2^p(\Omega)$, les égalités (2.35) et les propriétés d'unicité établies dans le Théorème II.5.1 montrent que $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. On en déduit tout d'abord que $(\boldsymbol{v}'', \eta'') = (\mathbf{0}, 0)$ puis, à nouveau grâce au Théorème II.5.1, que $(\boldsymbol{w}'', \tau'') = (\mathbf{0}, 0)$. Ainsi, $(\boldsymbol{u}, \pi) = (\boldsymbol{u}', \pi')$ et l'unicité est démontrée. $\diamondsuit$

En appliquant, comme nous l'avons annoncé, le Lemme 2.1, nous obtenons alors le résultat d'existence suivant :

Théorème 2.7 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine extérieur $C^{1,1}$, $p > 3$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$. Il existe une constante $A = A(p, \Omega) > 0$ telle que si*

$$\| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)} < A, \tag{2.36}$$

alors, il existe une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ du problème (NS). Celle-ci satisfait de plus l'estimation :

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)} + \| \pi \|_{\mathcal{Q}^p(\Omega)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)}, \tag{2.37}$$

où $C > 0$ ne dépend que de ν, p et Ω.

Remarque 2.8 Le Théorème 2.7 est en fait plus général que le Théorème 1.1 (i). En effet, par définition de $\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$ (*cf.* (2.12)), on a clairement :

$$\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega) \subset \boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega) \quad \text{avec} \quad \| \,.\, \|_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)} \leq \| \,.\, \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)}.$$

Soulignons par ailleurs que, pour établir le Théorème 1.1 (i), il n'aurait pas été possible d'appliquer le Lemme 2.1 avec $F = \mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)$. En effet, dans le schéma d'approximation (2.7),(2.8), le couple $(\boldsymbol{u}_1, \pi_1)$ est déterminé par les équations

$$-\nu \Delta \boldsymbol{u}_1 + \nabla \pi_1 = \boldsymbol{f}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u}_{1|\partial\Omega} = \mathbf{0}.$$

Comme $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)$, on sait d'après le Théorème II.5.1 que ce problème admet une unique solution

$$\boldsymbol{u}_1 = U\mathbf{F} + \boldsymbol{w}, \qquad \pi_1 = \mathbf{Q}.\mathbf{F} + \tau,$$

où le vecteur $\mathbf{F}$ est donné par (II.5.1) et $(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}_2^{1,p}(\Omega) \times L_2^p(\Omega)$. Il n'est alors pas difficile de vérifier que $\boldsymbol{u}_1.\nabla \boldsymbol{u}_1$ appartient à $\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$ (*cf.* Lemme 2.2) mais pas à $\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)$ car la partie homogène $\operatorname{div}(U\mathbf{F} \otimes U\mathbf{F})$ n'est pas nulle en général.

3 Egalité d'énergie et unicité des solutions

Nous établissons ici les points (ii) et (iii) du Théorème 1.1 tout en restant dans le cadre plus général fourni par le Théorème 2.7. On commence par donner des résultats d'inclusions pour les espaces $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on introduit l'espace

$$L^\infty_\alpha(\Omega) = \{ f \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \rho^\alpha f \in L^\infty(\Omega) \},$$

muni de sa norme naturelle.

Lemme 3.1 *Soit Ω un domaine extérieur et $p > 3$. On a les inclusions suivantes :*

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \subset \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega), \quad \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \subset \mathbf{L}_1^\infty(\Omega), \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega) \subset \mathbf{W}_0^{-1,q}(\Omega), \quad \forall\ 3/2 < q < p, \tag{3.2}$$

avec injections continues.

Preuve :
i) Soit $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$, *i.e.*, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ avec $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}$ et $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}^{1,p}_2(\Omega)$. D'une part, la definition de l'espace $\mathcal{M}^1_{-1}$ implique clairement que

$$\| \boldsymbol{v} \|_{\mathbf{L}^\infty_1(\Omega)} + \| \nabla \boldsymbol{v} \|_{L^\infty_2(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}}. \tag{3.3}$$

L'inégalité de Hölder permet d'en déduire que $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}^{1,2}_0(\Omega)$ avec

$$\| \boldsymbol{v} \|_{\mathbf{W}^{1,2}_0(\Omega)} \leq C \| \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}}.$$

D'autre part, le Lemme III.2.7 montre que

$$\mathbf{W}^{1,p}_2(\Omega) \subset \mathbf{W}^{1,2}_0(\Omega)$$

avec injection continue car $p > 2$ et $3/p + 2 > 3/2$. L'inclusion de $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$ dans $\mathbf{W}^{1,2}_0(\Omega)$ découle trivialement de ces deux propriétés ainsi que la continuité de l'injection canonique. Rappelons aussi que, grâce à la Proposition I.3.9, l'espace $\mathbf{W}^{1,p}_2(\Omega)$ s'injecte continûment dans $\mathbf{L}^\infty_1(\Omega)$, ce qui, avec (3.3) montre la continuité de la seconde injection.

ii) Soit $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$, *i.e.* $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{g}$ avec $\boldsymbol{h} \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)$ et $g \in \mathbf{W}^{-1,p}_2(\Omega)$. Si $3/2 < q < p$, alors on a $q' > p'$ et $3/q' > 1$. De plus, comme $p > 3$ et $q > 3/2$, on a aussi

$$3/p' - 2 < 1 < 3/q'.$$

En particulier, le Lemme III.2.7 entraîne que $\mathring{\mathbf{W}}^{1,q'}_0(\Omega) \subset \mathring{\mathbf{W}}^{1,p'}_{-2}(\Omega)$, et par dualité

$$\mathbf{W}^{-1,p}_2(\Omega) \subset \mathbf{W}^{-1,q}_0(\Omega), \tag{3.4}$$

avec injections continues.

D'autre part, $\boldsymbol{h} = (\operatorname{div} H)_{|\Omega}$ où $H \in \mathcal{M}^1_{-2}$ est un tenseur d'ordre 2. En particulier, pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$, et pour tout $G \in \mathcal{M}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega)$ on a

$$|H(\boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{x})| \leq \frac{\| H + G \|_{\mathcal{M}^1_{-2}}}{|\boldsymbol{x}|^2},$$

d'où, pour $q > 3/2$:

$$\inf_{G \in \mathcal{M}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega)} \| H + G \|_{L^q(\Omega)} \leq C \inf_{G \in \mathcal{M}^1_{-2,\,\mathrm{div}}(\Omega)} \| H + G \|_{\mathcal{M}^1_{-2}} = C \| \boldsymbol{h} \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)}.$$

Par continuité de l'opérateur divergence de $\mathbf{L}^q(\Omega)$ dans $W^{-1,q}_0(\Omega)$ et comme dans Ω on a $\boldsymbol{h} = \operatorname{div}(H + G)$, on déduit de cette estimation que

$$\| \boldsymbol{h} \|_{\mathbf{W}^{-1,q}_0(\Omega)} \leq C \| \boldsymbol{h} \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)},$$

ce qui avec (3.4) établit l'inclusion (3.2) et la continuité de l'injection canonique. $\diamondsuit$

Grâce à ce résultat nous pouvons énoncer et démontrer le

Théorème 3.2 *Soient Ω un domaine extérieur $C^{1,1}$, $p>3$, $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$ vérifiant* (2.36) *et une solution $(\boldsymbol{u},\pi)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)\times\mathcal{Q}^p(\Omega)$ du problème (NS). Alors, $\boldsymbol{u}$ est une solution d'énergie finie du problème (NS) qui vérifie l'égalité d'énergie :*

$$\nu\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}|^2 d\boldsymbol{x} = <\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}>_{\mathbf{W}_0^{-1,2}\times\mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}} . \tag{3.5}$$

De plus, quitte à choisir la constante A dans (2.36) *suffisament petite, la solution donnée par le Théorème 2.7 est l'unique solution du problème (NS) dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)\times\mathcal{Q}^p(\Omega)$.*

Preuve :

i) Il est clair que $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$ est d'énergie finie (voir Définition III.1.1) car elle appartient à $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ grâce au Lemme 3.1 et satisfait $\boldsymbol{u}_{|\partial\Omega}=\mathbf{0}$ par hypothèse.

ii) Nous prouvons maintenant l'égalité (3.5). Comme $\boldsymbol{u}\in\mathring{\mathbf{W}}{}_0^{1,2}(\Omega)$, il existe d'après le Théorème II.2.4 une suite $\boldsymbol{u}_m\in\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ (c'est-à-dire $\boldsymbol{u}_m\in\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ et $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_m=0$) telle que

$$\boldsymbol{u}_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{u} \quad \text{dans } \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega). \tag{3.6}$$

En particulier, pour tout $m\geq 0$:

$$\nu\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{u}_m d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}_m d\boldsymbol{x} = <\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}_m>_{\mathbf{W}_0^{-1,2}\times\mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}} . \tag{3.7}$$

On déduit alors de (3.6) que

$$\nu\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{u}_m d\boldsymbol{x} \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \nu\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}|^2 d\boldsymbol{x}, \tag{3.8}$$

$$<\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}_m> \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} <\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}> . \tag{3.9}$$

De plus, comme $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$ et $\boldsymbol{u}_{|\partial\Omega}=\mathbf{0}$, on a pour tout $m\geq 0$:

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}_m d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}_m.\boldsymbol{u} d\boldsymbol{x}, \tag{3.10}$$

grâce aux formules de Green. Le Lemme 3.1 montre par ailleurs que $\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}_1^\infty(\Omega)$ et $\nabla\boldsymbol{u}\in L^2(\Omega)$. On en déduit, avec l'inégalité de Hölder, les régularités :

$$\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}_1^2(\Omega), \quad \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}\in L_2^\infty(\Omega)\subset L^2(\Omega). \tag{3.11}$$

Ainsi peut-on, avec (3.6) et (3.11) et grâce à l'inégalité de Hölder, passer à la limite dans les deux membres de (3.10). On obtient alors :

$$\lim_{m\to+\infty}\int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}_m d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} d\boldsymbol{x} = 0. \tag{3.12}$$

L'égalité d'énergie est ainsi démontrée par passage à la limite grâce aux relations (3.7),(3.8),(3.9) et (3.12).

iii) Nous déduisons l'unicité de la solution dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ d'un résultat dû à G.P. Galdi [25] (Th. IX.3.2, p. 81) que l'on peut reformuler comme suit :

Théorème 3.3 (Galdi [25]) *Soient Ω un domaine extérieur lipschitzien ou $\Omega = \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{-1,3}(\Omega)$ et $\boldsymbol{u}$ une solution d'énergie finie du problème (NS). Il existe une constante $A_0 > 0$ telle que si*

$$\| \boldsymbol{u} \|_{L_1^\infty(\Omega)} < A_0, \tag{3.13}$$

alors, $\boldsymbol{u}$ est l'unique solution d'énergie finie satisfaisant (3.5).

En effet, grâce à l'inclusion (3.2) donnée par le Lemme 3.1, on sait que

$$\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{-1,3}(\Omega).$$

Par ailleurs, la solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ donnée par le Théorème 2.7 est d'énergie finie et vérifie (3.5) d'après les points (i) et (ii). Grâce aux estimations (2.37) et (3.1), on peut choisir la constante A dans (2.36) suffisament petite pour que (3.13) soit satisfaite. Dans ces conditions, si $(\boldsymbol{u}', \pi') \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ est une autre solution du problème (NS), alors le Théorème 3.3 montre que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$. On en déduit que $\nabla\pi = \nabla\pi'$, d'où l'égalité entre π et π' car $\mathcal{Q}^p(\Omega)$ ne contient pas les fonctions constantes. $\diamondsuit$

Remarque 3.4 *i*) Grâce aux Théorèmes 2.7 et 3.2, on peut introduire l'application définie sur une boule centrée en zéro suffisament petite de $\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$ qui à $\boldsymbol{f}$ associe l'unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ du problème (NS). On peut de plus montrer que cette application (non-linéaire) est continue. La preuve de cette propriété, par ailleurs valable dans le contexte général du Lemme 2.1, repose sur les propriétés de continuité de L et B et sur le caractère bilinéaire de B.

ii) Dans le même ordre d'idée, considérons $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$ vérifiant (2.36). Pour tout réel $\lambda \in [-1, 1]$, on peut introduire la solution $(\boldsymbol{u}_\lambda, \pi_\lambda) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ du problème :

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u}_\lambda + \boldsymbol{u}_\lambda.\nabla\boldsymbol{u}_\lambda + \nabla\pi_\lambda = \lambda\boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u}_\lambda = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u}_{\lambda|\partial\Omega} = \mathbf{0}.$$

Rappelons que cette solution est obtenue par convergence du schéma d'approximation (2.7), (2.8), grâce au Théorème du point fixe de Banach. En utilisant cette propriété, on peut aussi établir, grâce à la bilinéarité de B, que l'application $\lambda \mapsto (\boldsymbol{u}_\lambda, \pi_\lambda)$ est analytique de $]-1, 1[$ sur $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$.

Nous venons d'établir, pour des données $\boldsymbol{f}$ petites, l'existence et l'unicité d'une solution $(\boldsymbol{u},\pi)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)\times\mathcal{Q}^p(\Omega)$ pour le problème (NS) posé dans un domaine extérieur $C^{1,1}$. En particulier, ce résultat donne par construction un développement asymptotique de la vitesse $\boldsymbol{u}$ grâce à la décomposition naturelle $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ dans l'espace $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$ (voir (1.6)). Néammoins, en l'état des choses, on sait seulement que $\boldsymbol{v}$ est un champ de vecteurs homogène de degré -1. Il nous reste à caractériser les propriétés du couple $(\boldsymbol{v},\eta)$ (en particulier à démontrer le point (iv) du Théorème 1.1). Nous ne savons pas obtenir ce résultat par une analyse directe du problème extérieur. Nous effectuons donc tout d'abord une étude du problème (NS) dans $\mathbb{R}^3$ et établissons des résultats analogues, mais plus généraux que les précédents. En outre, nous allons pouvoir, dans $\mathbb{R}^3$, caractériser la partie homogène de la solution en fonction des données.

4 Le problème (NS) dans $\mathbb{R}^3$

4.1 Existence de solutions

Nous considérons des espaces analogues à ceux utilisés dans un domaine extérieur, *i.e.* dont les éléments se comportent à l'infini comme la somme d'une fonction homogène et d'une fonction décroissant plus vite. Néammoins, comme $\mathbb{R}^3$ contient l'origine (ce qui n'était pas le cas de Ω), nous imposons de plus une condition de régularité au voisinage de zéro. Celle-ci nous permet en quelque sorte d'"effacer" les singularités des fonctions homogènes à l'origine.

Dans cette section, nous supposons que les réels p et α vérifient :

$$p\geq 3/2 \quad \text{et} \quad 2\leq \frac{3}{p}+\alpha<3,$$

et nous introduisons les espaces :

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)=\{\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{u}\in\mathbf{W}^{1,p}(B_2),\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1},\ \boldsymbol{w}\in\mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\overline{B}_1^c)\,\},\tag{4.1}$$

$$\mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)=\{\,\pi=\eta+\tau,\ \pi\in L^p(B_2),\ \eta\in\mathcal{M}^0_{-2},\ \tau\in L^p_\alpha(\overline{B}_1^c)\,\},\tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)=\{\,\boldsymbol{f}=\boldsymbol{h}+\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{f}\in\mathbf{W}^{-1,p}(B_2),\ \boldsymbol{h}\in\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3),\ \boldsymbol{g}\in\mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\overline{B}_1^c)\,\}.\tag{4.3}$$

On peut montrer, grâce à la condition $3/p+\alpha\geq 2$, que les décompositions dans chacun de ces espaces sont uniques puis introduire les normes :

$$\|\,\boldsymbol{u}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha}=\|\,\boldsymbol{u}\,\|_{\mathbf{W}^{1,p}(B_2)}+\|\,\boldsymbol{v}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}}+\|\,\boldsymbol{w}\,\|_{\mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\overline{B}_1^c)},\tag{4.4}$$

$$\|\,\pi\,\|_{\mathcal{Q}^p_\alpha}=\|\,\pi\,\|_{L^p(B_2)}+\|\,\eta\,\|_{\mathcal{M}^0_{-2}}+\|\,\tau\,\|_{L^p_\alpha(\overline{B}_1^c)},\tag{4.5}$$

$$\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha}=\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\mathbf{W}^{-1,p}(B_2)}+\|\,\boldsymbol{h}\,\|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)}+\|\,\boldsymbol{g}\,\|_{\mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\overline{B}_1^c)},\tag{4.6}$$

qui les munissent d'une structure d'espace de Banach.

Remarque 4.1 En choisissant $p > 3$ et $\alpha = 2$, on obtient les analogues des espaces $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)$,$\mathcal{Q}^p(\Omega)$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}^p(\Omega)$.

Nous allons démontrer le résultat d'existence suivant.

Théorème 4.2 *Soient $p \geq 3/2$, α un réel tel que $2 \leq 3/p + \alpha < 3$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$. Il existe une constante $A' = A'(\nu, p, \alpha) > 0$ telle que si*

$$\| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)} < A', \tag{4.7}$$

alors, il existe une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ du problème (NS) et une constante $C = C(\nu, p, \alpha) > 0$ telle que

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)} + \| \pi \|_{\mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.8}$$

La preuve de ce résultat repose à nouveau sur le Lemme 2.1 que nous allons appliquer avec

$$E = \boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3), \quad F = \boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3).$$

L'application bilinéaire B est donnée par (2.5) et l'application L s'écrit formellement

$$L\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{u}, \pi) \ / \quad -\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Les deux paragraphes ci-dessous s'attachent à établir les propriétés de continuité de B et L nécessaires à l'application du Lemme 2.1

Continuité de l'application bilinéaire :
Nous démontrons tout d'abord un lemme d'inclusion puis un lemme d'interpolation.

Lemme 4.3 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un domaine extérieur lipschitzien ou $\Omega = \mathbb{R}^n$, $q < n$ et β tel que $n/q + \beta \neq 1$. Alors, on a l'inclusion :*

$$W^{1,q}_\beta(\Omega) \subset L^{q^*}_\beta(\Omega), \tag{4.9}$$

avec injection continue.

Preuve : Nous traitons le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, le cas d'un extérieur s'en déduit par restriction des fonctions à Ω. Lorsque $\beta = 0$, le résultat découle, par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{1,q}_0(\mathbb{R}^n)$, des injections de Sobolev. Si $\beta \neq 0$ et $n/q + \beta \neq 1$, on se ramène au cas précédent car la multiplication par ρ^β est continue de $W^{1,q}_\beta(\mathbb{R}^n)$ sur $W^{1,q}_0(\mathbb{R}^n)$ et la multiplication par $\rho^{-\beta}$ est continue de $L^{q^*}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{q^*}_\beta(\mathbb{R}^n)$ (voir par exemple Hanouzet [35] pour une preuve de ces propriétés). $\diamondsuit$

Lemme 4.4 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un domaine extérieur ou $\Omega = \mathbb{R}^n$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $h \in L^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^q_\beta(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour tout $\theta \in [0,1]$, on a*

$$\| h \|_{L^r_\gamma} \leq \| h \|^{p\theta/r}_{L^p_\alpha} \| h \|^{q(1-\theta)/r}_{L^q_\beta},$$

avec $r = \theta p + (1-\theta) q$ et $\gamma = \dfrac{\alpha\theta p + \beta(1-\theta)q}{r}$.

Preuve : C'est une conséquence directe de l'inégalité de Hölder appliquée à $\rho^{\gamma r}|h|^r$. $\Diamond$

Nous pouvons alors démontrer un premier résultat de continuité de B.

Lemme 4.5 *Soient $p \geq 3/2$ et α tel que $3/p + \alpha \geq 2$. Alors, on a les continuités :*

$$B \ : \ \mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbf{W}^{-1,p}_{2\alpha-2+3/p}(\mathbb{R}^3) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0, \quad si\ 3/2 \leq p \leq 3, \tag{4.10}$$
$$B \ : \ \mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbf{L}^{p}_{2\alpha-1+3/p}(\mathbb{R}^3) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0, \quad si\ p > 3. \tag{4.11}$$

Preuve : Dans toute la preuve, $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w'}$ désignent deux champs de vecteurs appartenant à $\mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3)$.

i) le cas $3/2 \leq p < 3$: Grâce au Lemme 4.3 et à la définition de $\mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^{p^*}_\alpha(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^p_{\alpha-1}(\mathbb{R}^3) \quad \text{avec} \quad \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^{p^*}_\alpha} + \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^p_{\alpha-1}} \leq C \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_\alpha}. \tag{4.12}$$

Comme $3/2 \leq p < 3$, on a $2 - 3/p \in [0, 1[$. En particulier, en posant $\theta = 2 - 3/p$, on peut interpoler $\mathbf{L}^{p^*}_\alpha(\mathbb{R}^3)$ et $\mathbf{L}^p_{\alpha-1}(\mathbb{R}^3)$ avec le Lemme 4.4. On en déduit avec l'inégalité (4.12), l'estimation :

$$\| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^{2p}_{\alpha-1+3/(2p)}} \leq C \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_\alpha}.$$

Celle-ci est également vérifiée par $\boldsymbol{w'}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\| \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w'} \|_{L^p_{2\alpha-2+3/p}} \leq C \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_\alpha} \| \boldsymbol{w'} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_\alpha}.$$

La conclusion résulte alors de la continuité de l'opérateur :

$$\operatorname{div} \ : \ \mathbf{L}^p_{2\alpha-2+3/p}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow W^{-1,p}_{2\alpha-2+3/p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathcal{P}_0,$$

qui est évidente, hors la condition d'orthogonalité. Mais, on remarque que le dual $W^{1,p'}_{2-2\alpha-3/p}(\mathbb{R}^3)$ de $W^{-1,p}_{2\alpha-2+3/p}(\mathbb{R}^3)$ contient les polynômes constants car

$$3/p + \alpha \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 - 3/p' - (2 - 2\alpha - 3/p) = 2(\alpha + 3/p) - 4 \leq 0.$$

On en déduit la condition d'orthogonalité par transposition et densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ dans $W^{1,p'}_{2-2\alpha-3/p}(\mathbb{R}^3)$.

ii) le cas $p = 3$: Supposons temporairement que $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$. Alors, on sait que :

$$B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}') = (\operatorname{div} \boldsymbol{w})\boldsymbol{w}' + \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{w}' \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^3} B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}')d\boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \tag{4.13}$$

De plus, $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in \mathbf{L}^3_{\alpha-1}(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla \boldsymbol{w}, \nabla \boldsymbol{w}' \in L^3_\alpha(\mathbb{R}^3)$ et l'inégalité de Hölder entraîne que

$$\| B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}') \|_{\mathbf{L}^{3/2}_{2\alpha-1}} \leq \| (\operatorname{div} \boldsymbol{w})\boldsymbol{w}' \|_{\mathbf{L}^{3/2}_{2\alpha-1}} + \| \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{w}' \|_{\mathbf{L}^{3/2}_{2\alpha-1}} \leq C\| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}^{1,3}_\alpha} \| \boldsymbol{w}' \|_{\mathbf{W}^{1,3}_\alpha}. \tag{4.14}$$

Appliquons finalement le Lemme 4.3 avec $q = 3/2$ et $\beta = 1 - 2\alpha$. Alors, par dualité on obtient que $\mathbf{L}^{3/2}_{2\alpha-1}(\mathbb{R}^3) \subset \mathbf{W}^{-1,3}_{2\alpha-1}(\mathbb{R}^3)$ avec injection continue. Grâce à cette inclusion et à la nullité de l'intégrale dans (4.13), on a

$$B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}') \in \mathbf{W}^{-1,3}_{2\alpha-1} \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0 \quad \text{avec} \quad \| B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}') \|_{\mathbf{W}^{-1,3}_{2\alpha-1}} \leq C\| B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}') \|_{\mathbf{L}^{3/2}_{2\alpha-1}}.$$

Cette propriété et l'inégalité (4.14) mènent au résultat grâce à la densité de $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbf{W}^{1,3}_\alpha(\mathbb{R}^3)$.

iii) le cas $p > 3$: D'après la Proposition I.3.9, on a

$$\| \rho^{3/p+\alpha-1} \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_\alpha} \quad \text{et} \quad \| \rho^{3/p+\alpha-1} \boldsymbol{w}' \|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\| \boldsymbol{w}' \|_{\mathbf{W}^{1,p}_\alpha}. \tag{4.15}$$

Si de plus $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w}' \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$, on déduit de (4.13), (4.15) et de l'inégalité de Hölder que

$$B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}') \in \mathbf{L}^p_{2\alpha-1+3/p} \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0 \quad \text{et} \quad \| B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}') \|_{\mathbf{L}^p_{2\alpha-1+3/p}} \leq C\| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_\alpha} \| \boldsymbol{w}' \|_{\mathbf{W}^{1,p}_\alpha}.$$

D'où la conclusion, par densité de $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3)$. $\Diamond$

Nous prouvons finalement la

Proposition 4.6 *Soit $p \geq 3/2$ et α tel que $2 \leq 3/p + \alpha < 3$. L'application bilinéaire*

$$B \ : \ \boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3),$$

est continue.

Preuve : Soient $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$.

$i)$ Comme $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \mathbf{W}^{1,p}(B_2)$, il n'est pas difficile (on peut par exemple reprendre les arguments utilisés dans le Lemme 4.5, mais en version locale) d'établir que

$$\| B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') \|_{\mathbf{W}^{-1,p}(B_2)} \leq C\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}^{1,p}(B_2)} \| \boldsymbol{u}' \|_{\mathbf{W}^{1,p}(B_2)} \leq C\| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha} \| \boldsymbol{u}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha}. \tag{4.16}$$

ii) Introduisons de plus les décompositions naturelles de $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'$ dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha$, c'est-à-dire, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}'$, avec $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}$ et $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in \mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\overline{B}^c_1)$. Alors,

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = -\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}') - [\operatorname{div}(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}') + \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}') + \operatorname{div}(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}')].$$

Comme dans le Lemme 2.2 on montre que $\boldsymbol{h} = -\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}') \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)$ et satisfait l'estimation :

$$\| \boldsymbol{h} \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} \| \boldsymbol{v}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} \leq C \| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha} \| \boldsymbol{u}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha}. \tag{4.17}$$

De même, (en adaptant le point (*ii*) de la preuve du Lemme 2.2) on montre que le terme $\boldsymbol{g}^1 = -\operatorname{div}(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}') - \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}')$ vérifie

$$\| \boldsymbol{g}^1 \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\overline{B}^c_1)} \leq C \| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha} \| \boldsymbol{u}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha}. \tag{4.18}$$

Enfin, la régularité du terme restant $\boldsymbol{g}^2 = -\operatorname{div}(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}')$ découle du Lemme 4.5 car comme $3/p + \alpha \geq 2$, on a

$$2\alpha - 2 + 3/p \geq \alpha,$$

de sorte que les inclusions suivantes ont lieu :

$$L^p_{2\alpha-1+3/p}(\overline{B}^c_1) \subset W^{-1,p}_{2\alpha-2+3/p}(\overline{B}^c_1) \subset W^{-1,p}_\alpha(\overline{B}^c_1),$$

avec injections continues. On en déduit alors que :

$$\| \boldsymbol{g}^2 \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\overline{B}^c_1)} \leq C \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\overline{B}^c_1)} \| \boldsymbol{w}' \|_{\mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\overline{B}^c_1)} \leq C \| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha} \| \boldsymbol{u}' \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha}. \tag{4.19}$$

iii) Nous avons ainsi établi l'égalité $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = \boldsymbol{h} + (\boldsymbol{g}^1 + \boldsymbol{g}^2)$ avec $\boldsymbol{h} \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)$ et $\boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2 \in \mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\overline{B}^c_1)$. Les estimations (4.16),(4.17),(4.18) et (4.19) prouvent alors la continuité de B. $\diamondsuit$

Construction de l'application L

Proposition 4.7 *Soient $p \geq 3/2$, α tel que $2 \leq 3/p + \alpha < 3$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$. Il existe un unique couple $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ tel que*

$$-\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla \pi = \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \ \textit{dans}\ \mathbb{R}^3. \tag{4.20}$$

Il existe de plus une constante $C = C(\nu, p, \alpha)$ telle que :

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)} + \| \pi \|_{\mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}.$$

Preuve : L'idée générale est de considérer séparément les parties homogènes et non-homogènes. Nous détaillons ci-dessous les arguments essentiels de la démonstration. On se donne une distribution $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$, c'est à dire, et $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{g}$ avec $\boldsymbol{h} \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)$ et $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\overline{B}^c_1)$ telles que $\boldsymbol{h} + \boldsymbol{g} \in \mathbf{W}^{-1,p}(B_2)$.

i) Soit un réel β tel que $1 < 3/p + \beta < 2$. On a en particulier $\beta < \alpha$ et il n'est pas difficile d'établir les inclusions :

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \subset \mathbf{W}^{1,p}_\beta(\mathbb{R}^3), \quad \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \subset L^p_\beta(\mathbb{R}^3), \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \subset \mathbf{W}^{-1,p}_\beta(\mathbb{R}^3), \tag{4.21}$$

avec injections continues. En particulier, d'après le Théorème I.4.7, il existe un unique couple $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}_\beta(\mathbb{R}^3) \times L^p_\beta(\mathbb{R}^3)$ vérifiant (4.20) et

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}^{1,p}_\beta(\mathbb{R}^3)} + \| \pi \|_{L^p_\beta(\mathbb{R}^3)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_\beta(\mathbb{R}^3)}, \tag{4.22}$$

Nous allons montrer que cette solution appartient de plus à $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$. Notons en particulier que l'injection continue de $\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbf{W}^{-1,p}_\beta(\mathbb{R}^3)$ et l'estimation (4.22) entraînent déjà que

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}^{1,p}(B_2)} + \| \pi \|_{L^p(B_2)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.23}$$

ii) Nous allons introduire une autre décomposition de la distribution $\boldsymbol{f}$. Nous considérons pour cela une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\operatorname{supp} \varphi \subset B_2, \quad \varphi(\boldsymbol{x}) = 1, \ \forall \boldsymbol{x} \in B_1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1. \tag{4.24}$$

Rappelons que par définition de $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)$ (*cf.* (2.17)), on a $\boldsymbol{h} = \operatorname{div} H$ où $H \in \mathcal{M}^1_{-2}$ est un tenseur d'ordre 2. Alors, il est clair que la distribution $H\varphi$ est à support compact et appartient à $L^r(\mathbb{R}^3)$ pour tout $1 < r < 3/2$. De plus,

$$\| H\varphi \|_{L^r(\mathbb{R}^3)} \ \leq \ \| H \|_{L^\infty(\Sigma)} \| \frac{\varphi(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|^2} \|_{L^r(B_2)} \ \leq \ C(r) \| H \|_{\mathcal{M}^1_{-2}} \ \leq \ C(r) \| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}.$$

On en déduit en particulier que

$$\operatorname{div}(H\varphi) \in \mathbf{W}^{-1,r}_0(\mathbb{R}^3) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0, \qquad \| \operatorname{div}(H\varphi) \|_{\mathbf{W}^{-1,r}_0(\mathbb{R}^3)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.25}$$

On remarque par ailleurs que

$$\operatorname{div}(H\varphi) + \boldsymbol{g} \ = \ \boldsymbol{h}\varphi + H\nabla\varphi + \boldsymbol{g} \ = \ \boldsymbol{f}\varphi + H\nabla\varphi + \boldsymbol{g}(1 - \varphi),$$

ce qui permet de montrer que $\operatorname{div}(H\varphi) + \boldsymbol{g} \in \mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3)$ avec

$$\| \operatorname{div}(H\varphi) + \boldsymbol{g} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.26}$$

De plus, l'hypothèse $3/p+\alpha \geq 2$ implique que $1-3/p'+\alpha \geq 0$, inégalité assurant que l'espace $\mathbf{W}^{1,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^3)$ contient les polynômes constants. On peut donc introduire le moment généralisé d'ordre 0 (voir Section 1.4) de $\operatorname{div}(H\varphi)+\boldsymbol{g}$, *i.e.* le vecteur $m_0(\boldsymbol{g}+\operatorname{div}(H\varphi))$ de coordonnées :

$$< g_i + \partial_j(H_{ij}\varphi), 1 >_{W^{-1,p}_{\alpha}\times W^{1,p'}_{-\alpha}}, \qquad i=1,2,3 \tag{4.27}$$

D'autre part, en notant que $g=(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{h})\varphi+g(1-\varphi)$, soit la somme d'une distribution à support compact et d'une distribution de $\mathbf{W}^{-1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^3)$, on peut donner un sens au moment généralisé $m_0(\boldsymbol{g})$. De plus, on obtient

$$m_0(\boldsymbol{g}) = m_0(\boldsymbol{g}+\operatorname{div}(H\varphi)), \qquad |\, m_0(\boldsymbol{g})\,| \leq C\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}, \tag{4.28}$$

l'égalité des moments résultant de (4.25) (qui montre que $m_0(\operatorname{div}(H\varphi))=\mathbf{0}$) et l'estimation découlant ensuite de (4.26).

Nous posons alors $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{h}^0+\boldsymbol{g}^1+\boldsymbol{g}^2$ avec

$$\boldsymbol{h}^0 = \delta m_0(\boldsymbol{g})+\boldsymbol{h}, \tag{4.29}$$

$$\boldsymbol{g}^1 = (\varphi-\delta)m_0(\boldsymbol{g}) - \operatorname{div}(H\varphi), \tag{4.30}$$

$$\boldsymbol{g}^2 = \boldsymbol{g} + \operatorname{div}(H\varphi) - \varphi m_0(\boldsymbol{g}). \tag{4.31}$$

Nous allons résoudre les problèmes de Stokes associés à $\boldsymbol{h}^0, \boldsymbol{g}^1$ et $\boldsymbol{g}^2$ dans les espaces adéquats et déterminer une autre expression de la solution $(\boldsymbol{u},\pi)$ obtenue au point (i).

$iii)$ Rappelons que la mesure de Dirac peut s'écrire $\delta = \operatorname{div}\frac{\boldsymbol{x}}{4\pi|\boldsymbol{x}|^3}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Comme le champ de vecteurs $\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|^3$ appartient à $\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-2}$, on a

$$\boldsymbol{h}^0 = \delta m_0(\boldsymbol{g})+\boldsymbol{h} \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3),$$

avec

$$\|\,\boldsymbol{h}^0\,\|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)} \leq C(|\,m_0(\boldsymbol{g})\,| + \|\,\boldsymbol{h}\,\|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)}) \leq C\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.32}$$

Ainsi, d'après la Proposition 2.4, il existe un unique couple $(\boldsymbol{v},\eta) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}\times\mathcal{M}^0_{-2}$, solution du système :

$$-\nu\Delta\boldsymbol{v}+\nabla\eta = \boldsymbol{h}^0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0 \quad \text{dans } \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^3), \tag{4.33}$$

$$\|\,\boldsymbol{v}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} + \|\,\eta\,\|_{\mathcal{M}^0_{-2}} \leq C\|\,\boldsymbol{h}^0\,\|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.34}$$

$iv)$ La distribution $\boldsymbol{g}^1$ donnée par (4.30) est à support compact dans B_2. De plus, si $1<r<3/2$, on peut montrer que $\delta \in \mathbf{W}^{-1,r}_0(\mathbb{R}^3)$. On déduit alors de (4.25) et (4.28) que :

$$\boldsymbol{g}^1 \in \mathbf{W}^{-1,r}_0(\mathbb{R}^3), \quad \text{et} \quad \|\,\boldsymbol{g}^1\,\|_{\mathbf{W}^{-1,r}_0} \leq C\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.35}$$

En outre, comme l'intégrale de φ vaut 1 et grâce à (4.25), il est clair que $m_0(\boldsymbol{g}^1) = \mathbf{0}$. Alors, le Théorème I.4.11 (avec $m = 0$) montre qu'il existe un couple de distributions $(\boldsymbol{w}^1, \tau^1)$ tel que

$$-\nu\Delta \boldsymbol{w}^1 + \nabla\tau^1 = \boldsymbol{g}^1, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{w}^1 = 0 \quad \text{dans } \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^3), \tag{4.36}$$

$$|\,\nabla^k \boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{x})| + |\boldsymbol{x}||\,\nabla^k\tau^1(\boldsymbol{x})| \leq C|\boldsymbol{x}|^{-2-k}\|\,\boldsymbol{g}^1\,\|_{\mathbf{W}_0^{-1,r}}, \tag{4.37}$$

pour tout entier $k \geq 0$ et $\boldsymbol{x}$ tel que $|\boldsymbol{x}| > 4$. On déduit alors des majorations ponctuelles (4.37) pour $k = 0, 1$ et de l'hypothèse $3/p + \alpha < 3$ que

$$\|\,\boldsymbol{w}^1\,\|_{\mathbf{W}_\alpha^{1,p}(\overline{B}_4^c)} + \|\,\tau^1\,\|_{L^p_\alpha(\overline{B}_4^c)} \leq C\|\,\boldsymbol{g}^1\,\|_{\mathbf{W}_0^{-1,r}},$$

puis grâce à (4.35) que

$$\|\,\boldsymbol{w}^1\,\|_{\mathbf{W}_\alpha^{1,p}(\overline{B}_4^c)} + \|\,\tau^1\,\|_{L^p_\alpha(\overline{B}_4^c)} \leq C\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.38}$$

$v)$ Nous avons vu au point (ii) que la distribution $\boldsymbol{g} + \operatorname{div}(H\varphi)$ appartient à $\mathbf{W}_\alpha^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Il en est alors trivialement de même pour $\boldsymbol{g}^2$ qui est donnée par (4.31) car $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ et on a de plus grâce à (4.26) et (4.28) :

$$\|\,\boldsymbol{g}^2\,\|_{\mathbf{W}_\alpha^{-1,p}} \leq C\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.39}$$

Comme φ est d'intégrale 1 et grâce à (4.28), on vérifie que $\boldsymbol{g}^2 \in \mathbf{W}_\alpha^{-1,p}(\mathbb{R}^3)\perp\boldsymbol{\mathcal{P}}_0$. Ainsi, il existe d'après le Théorème I.4.8, un unique couple $(\boldsymbol{w}^2, \tau^2) \in \mathbf{W}_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{w}^2 + \nabla\tau^2 = \boldsymbol{g}^2, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{w}^2 = 0 \quad \text{dans } \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^3), \tag{4.40}$$

$$\|\,\boldsymbol{w}^2\,\|_{\mathbf{W}_\alpha^{1,p}} + \|\,\tau^2\,\|_{L^p_\alpha} \leq C\|\,\boldsymbol{g}^2\,\|_{\mathbf{W}_\alpha^{-1,p}} \leq C\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.41}$$

$vi)$ Posons finalement $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{w}^1 + \boldsymbol{w}^2)$ et $\pi' = \eta + (\tau^1 + \tau^2)$. D'après (4.33),(4.36) et (4.40) et comme $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{h}^0 + \boldsymbol{g}^1 + \boldsymbol{g}^2$, on a :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{u}' + \nabla\pi' = \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}' = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

En comparant le comportement asymptotique de $(\boldsymbol{u}', \pi')$ et de la solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ obtenue au point (i), on montre que $(\boldsymbol{u}, \pi) = (\boldsymbol{u}', \pi')$. De plus, les estimations (4.23), (4.34), (4.38) et (4.41) permettent finalement de montrer que

$$\|\,\boldsymbol{u}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)} + \|\,\pi\,\|_{\mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)}.$$

Quant à l'unicité de la solution dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$, c'est une conséquence des inclusions (4.21) et de l'unicité de $(\boldsymbol{u}, \pi)$ dans $\mathbf{W}_\beta^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p_\beta(\mathbb{R}^3)$ (voir le point (i)), ce qui termine la preuve de la Proposition 4.7. $\diamondsuit$

Le Théorème 4.2 est donc démontré grâce aux Propositions 4.6 et 4.7, par application du Lemme 2.1. En particulier, rappelons que, d'après ce lemme, la solution du problème (NS) est obtenue comme limite de la suite $(\boldsymbol{u}_k, \pi_k) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ définie par :

. $(\boldsymbol{u}_0, \pi_0) = (\boldsymbol{0}, 0)$

. Pour tout entier $k \geq 0$, $(\boldsymbol{u}_{k+1}, \pi_{k+1})$ est l'unique solution dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ du problème de Stokes :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{u}_{k+1} + \nabla \pi_{k+1} = \boldsymbol{f} - \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_k \otimes \boldsymbol{u}_k), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_{k+1} = 0 \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \tag{4.42}$$

Le corollaire suivant caractérise la partie homogène $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ de la solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ obtenue par convergence de l'algorithme de point fixe.

Corollaire 4.8 *Soient $p \geq 3/2$, α tel que $2 \leq 3/p + \alpha < 3$. Soient $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ vérifiant (4.7) et $(\boldsymbol{u}, \pi)$ la limite dans l'espace $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ de la suite $(\boldsymbol{u}_k, \pi_k)$ donnée par (4.42). Alors, la partie homogène $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ de $(\boldsymbol{u}, \pi)$ vérifie les relations :*

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla \eta = \boldsymbol{h} + m_0(\boldsymbol{g})\delta, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \tag{4.43}$$

De plus, si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3)$ alors $\boldsymbol{h} + m_0(\boldsymbol{g})\delta = m_0(\boldsymbol{f})\delta$ et les fonctions $\boldsymbol{v}$ et η sont C^∞ en dehors de l'origine. Enfin, $(\boldsymbol{v}, \eta) = (\boldsymbol{0}, 0)$ si et seulement si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0$.

Preuve : Désignons pour tout entier $k \geq 0$ par $(\boldsymbol{v}_k, \eta_k)$ la partie homogène de $(\boldsymbol{u}_k, \pi_k)$. Par définition des normes de $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ (voir (4.4), (4.5)), la convergence de $(\boldsymbol{u}_k, \pi_k)$ vers $(\boldsymbol{u}, \pi)$ entraîne celle de $(\boldsymbol{v}_k, \eta_k)$ vers $(\boldsymbol{v}, \eta)$ dans $\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \boldsymbol{\mathcal{M}}^0_{-2}$. Grâce aux Propositions 4.6 et 4.7, nous allons obtenir une formule de récurrence pour $(\boldsymbol{v}_k, \eta_k)$ qui donnera (4.43) par passage à la limite.

$i)$ Posons, pour tout $k \geq 0$,

$$\boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{f} - \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_k \otimes \boldsymbol{u}_k).$$

C'est un élément de $\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ et d'après la preuve de la Proposition 4.6, sa décomposition naturelle $\boldsymbol{h}_k + \boldsymbol{g}_k$ avec $\boldsymbol{h}_k \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)$ et $\boldsymbol{g}_k \in \mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\overline{B}^c_1)$ dans cet espace est la suivante :

$$\boldsymbol{h}_k = \boldsymbol{h} - \operatorname{div}(\boldsymbol{v}_k \otimes \boldsymbol{v}_k), \qquad \boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g} - \operatorname{div}(\boldsymbol{v}_k \otimes \boldsymbol{w}_k + \boldsymbol{w}_k \otimes \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{w}_k \otimes \boldsymbol{w}_k). \tag{4.44}$$

De plus, avec des arguments similaires à ceux utilisés dans le point (ii) de la preuve de la Proposition 4.7, on peut montrer que pour tout k, $m_0(\boldsymbol{g}_k) = m_0(\boldsymbol{g})$.

Comme au point (iii) de la preuve de la Proposition 4.7, on peut montrer (*cf.* Proposition 2.4) que $(\boldsymbol{v}_{k+1}, \eta_{k+1})$ est l'unique solution dans $\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \boldsymbol{\mathcal{M}}^0_{-2}$ du problème de Stokes :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v}_{k+1} + \nabla \eta_{k+1} = \boldsymbol{h}_k + m_0(\boldsymbol{g}_k)\delta = \boldsymbol{h} - \operatorname{div}(\boldsymbol{v}_k \otimes \boldsymbol{v}_k) + m_0(\boldsymbol{g})\delta, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}_{k+1} = 0.$$

D'autre part, par définition des normes dans $\mathcal{M}^l_\gamma$, on a pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ et tout $k \geq 0$:

$$|\boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})| \leq \frac{\| \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}}}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\eta_k(\boldsymbol{x}) - \eta(\boldsymbol{x})| \leq \frac{\| \eta_k - \eta \|_{\mathcal{M}^0_{-2}}}{|\boldsymbol{x}|^2}.$$

Comme $(\boldsymbol{v}_k, \eta_k)$ tend vers $(\boldsymbol{v}, \eta)$ dans $\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ il est alors clair que $\boldsymbol{v}_k$ converge localement vers $\boldsymbol{v}$ dans L^2 et η_k localement vers η dans L^1. De ces convergences découlent alors les suivantes :

$$\boldsymbol{v}_k \rightharpoonup \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}_k \otimes \boldsymbol{v}_k \rightharpoonup \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}, \quad \eta_k \rightharpoonup \eta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

On obtient alors les relations (4.43) par passage à la limite au sens des distributions.

ii) Soit $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3)$, espace qui s'injecte continûment dans $\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$. Alors, la décomposition de $\boldsymbol{f}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ n'est autre que $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}$. Ainsi, on obtient l'égalité

$$\boldsymbol{h} + m_0(\boldsymbol{g})\delta = m_0(\boldsymbol{f})\delta,$$

et on déduit de (4.43) que

$$-\nu\Delta\boldsymbol{v} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla\eta = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}).$$

Comme $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}$, on a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\})$ et on en déduit que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}).$$

Grâce à un argument de localisation et de régularité pour le problème de Stokes dans un ouvert borné régulier, on obtient que $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\})$ et $\pi \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\})$ pour tout $p < +\infty$. On peut alors itérer cet argument de régularité pour obtenir finalement que $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}^{m+1,p}_{loc}(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\})$ et $\pi \in W^{m,p}_{loc}(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\})$ pour tout $m \geq 0$ et $p < +\infty$ ce qui donne la régularité C^∞ en dehors de l'origine.

iii) Soit $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0$. Alors on a $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{g}$ avec $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$ et $m_0(\boldsymbol{g}) = 0$. On raisonne par récurrence : par hypothèse, on sait que $(\boldsymbol{v}_0, \eta_0) = (\mathbf{0}, 0)$. Supposons que, pour un entier $k \geq 0$, on ait $(\boldsymbol{v}_k, \eta_k) = (\mathbf{0}, 0)$. Alors, comme $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$, la distribution $\boldsymbol{h}_k$ donnée par (4.44) est nulle. Ainsi, sachant que $(\boldsymbol{v}_{k+1}, \eta_{k+1})$ est l'unique solution dans $\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ du problème :

$$-\nu\Delta\boldsymbol{v}_{k+1} + \nabla\eta_{k+1} = \boldsymbol{h}_k = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v}_{k+1} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),$$

on obtient $(\boldsymbol{v}_{k+1}, \eta_{k+1}) = (\mathbf{0}, 0)$. Par conséquent la partie homogène est nulle à chaque itération et il vient donc à la limite $(\boldsymbol{v}, \eta) = (\mathbf{0}, 0)$. Réciproquement, si $(\boldsymbol{v}, \eta) = (\mathbf{0}, 0)$, alors on a $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3) \times L^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$. En particulier, on a vu au Chapitre I que comme $3/p + \alpha \geq 2$, on a

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi \in \mathbf{W}^{-1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0.$$

D'autre part, le Lemme 4.5 montre que $\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_\alpha^{-1,p}(\mathbb{R}^3)\perp\boldsymbol{\mathcal{P}}_0$, ce qui établit finalement que $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_\alpha^{-1,p}(\mathbb{R}^3)\perp\boldsymbol{\mathcal{P}}_0$. $\diamondsuit$

Remarque 4.9 Revenons un instant sur les hypothèses sur p et α dans le Théorème 4.2, c'est-à-dire, $p \geq 3/2$ et $2 \leq 3/p + \alpha < 3$.

i) L'hypothèse $p \geq 3/2$ n'intervient qu'à travers des propriétés de régularité locale. Elle permet d'assurer que pour $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \mathbf{W}^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^3)$, on a $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') \in \mathbf{W}^{-1,p}_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

ii) L'hypothèse $3/p+\alpha \geq 2$ est naturelle dans le sens où elle assure les propriétés de développement asymptotique des éléments de $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$. En effet, d'après les Propositions I.3.8 et I.3.9, cette hypothèse entraîne que les fonctions de $W^{1,p}_\alpha$ sont négligeables à l'infini (en moyenne sphérique si $p \leq 3$ et au sens classique sinon) devant les fonctions homogènes de $\mathcal{M}^1_{-1}$. C'est aussi cette hypothèse qui permet d'établir la continuité de l'application B. Quant à l'hypothèse $3/p+\alpha < 3$, elle est liée aux conditions de compatibilité qui interviennent dans la résolution du problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$. Typiquement, on sait que le moment $m_0(B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'))$ est nul dès que $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{u}'$ sont suffisamment décroissantes (voir par exemple le Lemme 4.5). On peut en revanche trouver des champs de vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$ tels que les moments d'ordre 1 de $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')$ soient non-nuls.Or, la nullité de ces moments est une condition nécessaire pour que le problème de Stokes admette une solution dans $\mathbf{W}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^3) \times L^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ lorsque $3/p + \alpha \geq 3$ (voir Chapitre I, section 4). Signalons enfin qu'en dimension 2, nous ne savons pas construire de solutions $(\boldsymbol{u}, \pi)$ du problème de Stokes avec $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = O(r^{-1})$ sans imposer que les moments d'ordre 0 et d'ordre 1 des données soient nuls ce qui constitue le principal obstacle à l'adaptation des résultats obtenus en dimension 3.

4.2 Un résultat de régularité $\mathcal{H}^1$

Nous établissons un résultat de régularité $\mathcal{H}^1$ (voir paragraphe I.5.3) pour les solutions données par le Théorème 4.2 avec des hypothèses minimales de régularité locale et de décroissance des données. On rappelle en particulier que

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^3) \subset \mathbf{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)\perp\boldsymbol{\mathcal{P}}_0 \subset \boldsymbol{\mathcal{F}}^{3/2}_0(\mathbb{R}^3),$$

avec injections continues. Par conséquent, si $\boldsymbol{f}$ vérifie (4.7) avec $p = 3/2$ et $\alpha = 0$, alors il existe d'après le Théorème 4.2, une solution

$$(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^{3/2}_0(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^{3/2}_0(\mathbb{R}^3),$$

au problème (NS). Celle-ci vérifie de plus $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3) \times L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ d'après le Corollaire 4.8. Nous démontrons alors le

Théorème 4.10 *Soit* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3) \times L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ *une solution du problème* (NS). *Si de plus* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^3)$ *alors,* $\nabla^2 \boldsymbol{u}$ *et* $\nabla \pi$ *appartiennent à* $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$ *avec l'estimation :*

$$\| \nabla^2 \boldsymbol{u} \|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)} + \| \nabla \pi \|_{\boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^3)} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Preuve : La démonstration de ce résultat repose sur le lemme suivant

Lemme 4.11 (C.L.M.S [17], Th. II.1, 2)) *Soient* $\boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $\boldsymbol{w}' \in \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0$ *et* $\operatorname{rot} \boldsymbol{w}' = 0$ *alors*

$$\| \boldsymbol{w}.\boldsymbol{w}' \|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)} \| \boldsymbol{w}' \|_{\mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

En effet, rappelons que $\mathbf{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3) \subset \mathbf{L}^3(\mathbb{R}^3)$. On peut alors appliquer le Lemme 4.11 avec $p = 3/2$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{w}' = \nabla u_j$, $j = 1, 2, 3$. On en déduit avec l'hypothèse de régularité sur $\boldsymbol{f}$ que

$$\boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^3).$$

Comme $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3) \times L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$, le résultat découle alors du Théorème I.5.9. $\diamondsuit$

Remarque 4.12 Signalons que dans le cas $p = 3/2$ et $\alpha = 0$, le Théorème 4.2 améliore les résultats obtenus par P. Secchi dans [58] (Th. B, p. 295). En effet, pour montrer l'existence de solutions du problème (NS) avec $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^3(\mathbb{R}^3)$, il est supposé dans cet article que :

$$\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3), \quad \boldsymbol{f} = \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{h} + \nabla g, \text{ avec } \boldsymbol{h}, g \in \mathbf{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3).$$

avec une condition de petitesse de la norme $L^{3/2}$ de $\boldsymbol{h}$ et g. L'hypothèse $\boldsymbol{f} = \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{h} + \nabla g$ entraine en particulier $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0$. De plus, comme g et $\boldsymbol{h}$ sont petites, on sait que la norme $\mathbf{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ de $\boldsymbol{f}$ est petite. Ainsi, grâce au Théorème 4.2 et au Corollaire 4.8, il existe une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3) \times L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ du problème (NS). Ceci implique non seulement que $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^3(\mathbb{R}^3)$ mais aussi que $\nabla \boldsymbol{u}, \pi \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ ce qui n'est pas établi par P. Secchi. De plus, pour établir l'existence de cette solution nous n'avons pas utilisé l'hypothèse $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$. Notons cependant que cette hypothèse supplémentaire permet, dans [58] d'obtenir que

$$\nabla \boldsymbol{u}, \pi \in L^3(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad D^2 \boldsymbol{u}, \nabla \pi \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3),$$

régularités qui ne sont pas données directement par nos résultats.

4.3 Unicité des solutions

Comme dans le cas d'un domaine extérieur, on peut établir l'unicité des solutions dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ lorsque le champ de forces $\boldsymbol{f}$ est suffisament petit dans $\boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$. Nous ne donnons pas la preuve de ce résultat. Elle repose sur des propriétés d'inclusions analogues à celles établies dans le Lemme 3.1 puis utilise les mêmes arguments que le Théorème 3.3.

Théorème 4.13 *Soient $p > 3$, α tel que $2 \leq 3/p + \alpha < 3$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ vérifiant* (4.7). *Soit de plus $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ une solution du problème (NS). Alors, $\boldsymbol{u}$ est une solution d'énergie finie du problème (NS) qui vérifie l'égalité d'énergie :*

$$\nu \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 d\boldsymbol{x} = <\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}>_{\mathbf{W}_0^{-1,2} \times \mathbf{W}_0^{1,2}} \tag{4.45}$$

De plus, quitte à choisir la constante A' dans (4.7) *suffisament petite, la solution donnée par le Théorème 2.7 est l'unique solution du problème (NS) dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$.*

Remarque 4.14 On peut en fait étendre ce résultat au cas $p \geq 2$ avec des arguments similaires, mais en utilisant une autre propriété d'unicité des solutions faibles vérifiant une inégalité d'énergie (voir H. Kozono, H. Sohr, [42] ou G.P. Galdi [25] Th. IX. 3.1). En revanche, lorsque $p < 2$, les champs de vecteurs $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$ ne vérifient pas *a priori* $\nabla \boldsymbol{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)$. En particulier, la méthode utilisée pour les Théorèmes 3.3 et 4.13 ne s'applique plus, ce qui laisse ouverte la question de l'unicité des solutions dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p_\alpha(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}^p_\alpha(\mathbb{R}^3)$, $p < 2$.

5 Retour sur le problème extérieur

5.1 Identification de la partie homogène

Grâce aux résultats d'existence et d'unicité établis dans $\mathbb{R}^3$, nous sommes en mesure de démontrer le point (iv) du Théorème 1.1.

Théorème 5.1 *Soit Ω un domaine extérieur de frontière $C^{1,1}$ et $p > 3$. Soient de plus $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)$ satisfaisant* (2.36) *et $(\boldsymbol{u}, \pi)$ l'unique solution dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ du problème (NS). Quitte à choisir la constante A dans* (2.36) *suffisament petite, les parties homogènes $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ de $\boldsymbol{u}$ et π satisfont les relations*

$$-\nu \Delta \boldsymbol{v} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla \eta = \mathbf{F}\delta, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),$$

où $\mathbf{F}$ désigne la force totale exercée sur le fluide. De plus, $\boldsymbol{v}$ et η sont C^∞ en dehors de l'origine et sont nulles si et seulement si et seulement si $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Preuve : Soit $(\boldsymbol{u},\pi) = (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w},\eta+\tau) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)\times\mathcal{Q}^p(\Omega)$, l'unique solution du problème (NS) donnée par les points (i) et (ii) du Théorème 1.1. On rappelle que

$$\|\,\boldsymbol{u}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)} + \|\,\pi\,\|_{\mathcal{Q}^p(\Omega)} \leq C\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{W_2^{-1,p}(\Omega)}. \tag{5.1}$$

On va maintenant se ramener aux propriétés du problème (NS) dans $\mathbb{R}^3$ grâce à un prolongement adéquat.

$i)$ On introduit les fonctions $(\tilde{\boldsymbol{w}},\tilde{\tau})$ sur $\mathbb{R}^3$ données par :

$$\tilde{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w},\ \ \tilde{\tau} = \tau \ \text{ dans } \Omega, \qquad \tilde{\boldsymbol{w}} = -\boldsymbol{v},\ \tilde{\tau} = -\eta \ \text{ dans } \overline{\Omega'},$$

et nous posons $(\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\pi}) = (\boldsymbol{v}+\tilde{\boldsymbol{w}},\eta+\tilde{\tau})$. En particulier, on a

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u},\ \ \tilde{\pi} = \pi \ \text{ dans } \Omega, \qquad \tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0},\ \tilde{\pi} = 0 \ \text{ dans } \overline{\Omega'}. \tag{5.2}$$

Rappelons que $(\boldsymbol{u},\pi) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega_R)\times L^p(\Omega_R)$ pour tout $R \geq R_0$ et que $\boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0}$. Grâce à ces propriétés, il est clair que

$$(\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\pi}) \in \mathbf{W}^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^3)\times L^p_{loc}(\mathbb{R}^3). \tag{5.3}$$

D'autre part, on sait que $(\boldsymbol{w},\tau) \in \mathbf{W}^{1,p}_2(\Omega)\times L^p_2(\Omega)$ et comme $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ est nulle au bord de Ω, on vérifie facilement que

$$\tilde{\boldsymbol{w}} \in \mathbf{W}^{1,p}_2(\overline{B}_1^c), \quad \tau \in L^p_2(\overline{B}_1^c). \tag{5.4}$$

Ainsi avons-nous établi, grâce à (5.3) et (5.4), que $(\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\pi}) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p_2(\mathbb{R}^3)\times\mathcal{Q}^p_2(\mathbb{R}^3)$.

$ii)$ Introduisons maintenant la distribution sur $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = -\nu\Delta\tilde{\boldsymbol{u}} + \tilde{\boldsymbol{u}}.\nabla\tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla\tilde{\pi}. \tag{5.5}$$

Nous allons montrer que $\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbf{W}_2^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Pour cela, on considère $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ avec $\psi(\boldsymbol{x}) = 1$ si $|\boldsymbol{x}| \leq R_0$ et $\psi(\boldsymbol{x}) = 0$ si $|\boldsymbol{x}| \geq 2R_0$. On établit alors que $\tilde{\boldsymbol{f}}\psi$ et $\tilde{\boldsymbol{f}}(1-\psi)$ appartiennent à $\mathbf{W}_2^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$.

Comme $\operatorname{supp}(1-\psi) \subset \Omega$ et par définition de $(\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\pi})$, on a pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$:

$$< \tilde{\boldsymbol{f}}(1-\psi),\boldsymbol{\varphi} >_{\mathbb{R}^3} = < \tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\varphi}(1-\psi) >_{\mathbb{R}^3} = < \boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}(1-\psi) >_{\Omega}.$$

Or, $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)$, de sorte que :

$$|< \tilde{\boldsymbol{f}}(1-\psi),\boldsymbol{\varphi} >_{\mathbb{R}^3}| \leq \|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)}\|\,\boldsymbol{\varphi}(1-\psi)\,\|_{\mathbf{W}^{1,p'}_{-2}(\Omega)}, \tag{5.6}$$

$$\leq C\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)}\|\,\boldsymbol{\varphi}\,\|_{\mathbf{W}^{1,p'}_{-2}(\mathbb{R}^3)}, \tag{5.7}$$

D'autre part, d'après (5.3), on a en particulier $(\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\pi}) \in \mathbf{W}^{1,p}(B_{2R_0})\times L^p(B_{2R_0})$ et grâce au point (i), on peut montrer que

$$\|\,\tilde{\boldsymbol{u}}\,\|_{\mathbf{W}^{1,p}(B_{2R_0})} \leq C\|\,\boldsymbol{u}\,\|_{\boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega)}, \qquad \|\,\tilde{\pi}\,\|_{L^p(B_{2R_0})} \leq C\|\,\pi\,\|_{\mathcal{Q}^p(\Omega)}. \tag{5.8}$$

Ceci entraîne avec (5.1) que

$$\| \Delta \tilde{\boldsymbol{u}} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}(B_{2R_0})} + \| \nabla \tilde{\pi} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}(B_{2R_0})} \leq C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)}. \tag{5.9}$$

De plus, grâce aux injections de Sobolev et comme $p > 3$ on a aussi $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{L}^\infty(B_{2R_0})$. On déduit alors de l'inégalité de Hölder que $\tilde{\boldsymbol{u}}.\nabla \tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{L}^p(B_{2R_0})$ ainsi que, grâce à (5.1) et (5.8), l'estimation

$$\| \tilde{\boldsymbol{u}}.\nabla \tilde{\boldsymbol{u}} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}(B_{2R_0})} \leq C \| \boldsymbol{f} \|^2_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)}. \tag{5.10}$$

Les estimations (5.9) et (5.10) montrent alors que $\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbf{W}^{-1,p}(B_{2R_0})$ avec

$$\| \tilde{\boldsymbol{f}} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}(B_{2R_0})} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)} + \| \boldsymbol{f} \|^2_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)}). \tag{5.11}$$

Ainsi, comme $\operatorname{supp} \psi \subset B_{2R_0}$, on a pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$:

$$< \tilde{\boldsymbol{f}}\psi, \boldsymbol{\varphi} >_{\mathbb{R}^3} = < \tilde{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{\varphi}\psi >_{\mathbb{R}^3} = < \tilde{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{\varphi}\psi >_{B_{2R_0}},$$

et on en déduit avec (5.11) que

$$\begin{aligned} | < \tilde{\boldsymbol{f}}\psi, \boldsymbol{\varphi} >_{\mathbb{R}^3} | \quad & \leq \| \tilde{\boldsymbol{f}} \|_{\mathbf{W}^{-1,p}(B_{2R_0})} \| \boldsymbol{\varphi}\psi \|_{\mathbf{W}^{1,p'}(B_{2R_0})} && (5.12) \\ & \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)} + \| \boldsymbol{f} \|^2_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)}) \| \boldsymbol{\varphi} \|_{\mathbf{W}^{1,p'}_{-2}(\mathbb{R}^3)}. && (5.13) \end{aligned}$$

En réunissant les informations données par (5.7) et (5.13), on a montré que $\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbf{W}_2^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ avec

$$\| \tilde{\boldsymbol{f}} \|_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)} + \| \boldsymbol{f} \|^2_{\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)}) \tag{5.14}$$

$iii)$ Notons finalement que comme $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ dans Ω et $\boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \boldsymbol{0}$, on a $\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{u}} = 0$ dans $\mathbb{R}^3$. Grâce aux points (i), (ii) et d'après (5.5), nous avons donc établi que le couple $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\pi}) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}_2^p(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}_2^p(\mathbb{R}^3)$ vérifie les relations :

$$-\nu\Delta \tilde{\boldsymbol{u}} + \tilde{\boldsymbol{u}}.\nabla \tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla \tilde{\pi} = \tilde{\boldsymbol{f}}, \qquad \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{u}} = 0 \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),$$

avec $\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbf{W}_2^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \subset \boldsymbol{\mathcal{F}}_2^p(\mathbb{R}^3)$. Nous savons de plus, grâce aux Théorèmes 4.2 et 4.13 que ce problème admet une unique solution dans $\boldsymbol{\mathcal{U}}_2^p(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{Q}_2^p(\mathbb{R}^3)$ pourvu que $\tilde{\boldsymbol{f}}$ soit suffisamment petite dans $\mathbf{W}_2^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Or, il suffit d'après (5.14) que $\boldsymbol{f}$ soit suffisamment petite dans $\mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)$ pour que cette condition soit satisfaite. Dans ce cas, $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\pi})$ est la solution donnée par le Théorème 4.2 et on peut lui appliquer le Corollaire 4.8. On obtient alors que la partie homogène $(\boldsymbol{v}, \eta)$ de $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\pi})$ (qui n'est autre que celle de $(\boldsymbol{u}, \pi)$ d'après le point (i)) vérifie les relations :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla \eta = \delta m_0(\tilde{\boldsymbol{f}}), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \tag{5.15}$$

et que $\boldsymbol{v}$ et η sont C^∞ en dehors de l'origine. Enfin, on a l'équivalence :

$$(\boldsymbol{v},\eta) = (\mathbf{0},0) \iff m_0(\tilde{\boldsymbol{f}}) = \mathbf{0}.$$

iv) le Théorème 5.1 sera établi si l'on peut interpréter le vecteur $m_0(\tilde{\boldsymbol{f}})$ comme la force totale exercée sur le fluide. Une justification complète de cette interprétation nécessiterait des développements techniques que nous ne souhaitons pas exposer ici. Nous illustrons cette propriété lorsque la partie non-homogène $(\boldsymbol{w},\tau)$ de $(\boldsymbol{u},\pi)$ est régulière et décroissante, soit $(\boldsymbol{w},\tau) \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Dans ce cas, comme $(\boldsymbol{u},\pi)$ est solution du problème (NS) et compte tenu de (5.15), on obtient par différence les relations :

$$-\nu\Delta\boldsymbol{w} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{w}) + \nabla\tau = \boldsymbol{f}.$$

Comme $\boldsymbol{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, cette égalité entraîne que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\overline{\Omega})$. Choisissons de plus le réel R_0 tel que $\operatorname{supp}\boldsymbol{f} \subset \overline{\Omega_{R_0}}$. Alors, grâce à la troncature ψ introduite au point (ii), et aux propriétés de support de $\boldsymbol{f}$, on a pour tout $i = 1,2,3$:

$$\begin{aligned} m_0(\tilde{f}_i) &= <\tilde{f}_i, 1>_{\mathbb{R}^3}, \\ &= <\tilde{f}_i(1-\psi), 1>_{\mathbb{R}^3} + <\tilde{f}_i\psi, 1>_{\mathbb{R}^3}, \\ &= 0 + <\tilde{f}_i, \psi>_{\mathbb{R}^3}, \end{aligned}$$

Mais, par définition de $\tilde{\boldsymbol{f}}$, on a

$$<\tilde{f}_i,\psi>_{\mathbb{R}^3} = -\nu\int_\Omega u_i\Delta\psi d\boldsymbol{x} + \int_\Omega(\boldsymbol{u}.\nabla u_i)\psi d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \pi\partial_i\psi d\boldsymbol{x}.$$

Comme toutes les fonctions intervenant dans ces intégrales sont $C^\infty(\overline{\Omega})$, on en déduit grâce à des intégrations par parties que :

$$m_0(\tilde{\boldsymbol{f}}) = -\nu\int_\Omega \psi\Delta\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x} + \int_\Omega(\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u})\psi d\boldsymbol{x} + \int_\Omega\psi\nabla\pi d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega}(\nu\nabla\boldsymbol{u} - \pi I)\boldsymbol{n}ds,$$

car $\boldsymbol{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0}$ et $\psi_{|\partial\Omega} = 1$. Compte tenu des équations satisfaites par $\boldsymbol{u}$ et π dans Ω, et comme nous avons établi que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\overline{\Omega})$, cette dernière égalité s'écrit encore :

$$m_0(\boldsymbol{f}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega}(\nu\nabla\boldsymbol{u} - \pi I)\boldsymbol{n}ds,$$

quantité qui s'interprète comme la somme des forces volumiques et surfaciques exercées sur le fluide soit le vecteur force totale $\mathbf{F}$. $\diamondsuit$

Remarque 5.2 Rappelons que pour le problème de Stokes extérieur (voir Chapitre II, Section 5, et plus particulièrement la Remarque 5.6) le vecteur force totale $\mathbf{F}$ joue un rôle fondamental dans le comportement asymptotique des solutions. Dans ce cadre linéaire, nous avons pu de plus déterminer ce vecteur explicitement en fonction des données du problème grâce à l'expression (I.5.1). Pour le problème de Navier-Stokes, nous ne savons pas établir le même type de propriétés, c'est à dire donner une expression du vecteur $\mathbf{F}$ qui ne dépende que de la donnée $\boldsymbol{f}$ et de Ω.

5.2 Un résultat de régularité

Nous montrons maintenant que lorsque les données du problème (NS) sont plus régulières, alors il en est de même pour la solution donnée par le Théorème 1.1. De plus, on obtient alors un développement asymptotique de $\nabla \boldsymbol{u}$ et π. Rappelons en particulier la partie homogène $(\boldsymbol{v}, \eta)$ de la solution est C^∞ dans $\overline{\Omega}$. Il suffit donc d'étudier la régularité de la partie non-homogène $(\boldsymbol{w}, \tau)$.

Théorème 5.3 *Soient Ω un domaine extérieur $C^{1,1}$, $p > 3$, $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)$ vérifiant (2.36), et la solution $(\boldsymbol{u}, \pi) = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \eta + \tau) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^p(\Omega) \times \mathcal{Q}^p(\Omega)$ du problème (NS). Si de plus $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}_3^p(\Omega)$ alors $(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}_3^{2,p}(\Omega) \times \mathbf{W}_3^{1,p}(\Omega)$ et on a pour r suffisament grand :*

$$\nabla \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = o(r^{-2-3/p}), \qquad \tau(\boldsymbol{x}) = o(r^{-2-3/p}).$$

Preuve :

i) Soit $(\boldsymbol{u}, \pi) = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \eta + \tau)$, l'unique solution du problème (NS) avec $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega)$ suffisamment petite. D'après le Théorème 5.1 et comme Ω ne contient pas l'origine, on sait que :

$$-\nu \Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \eta = \boldsymbol{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On en déduit par différence que le couple $(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}_2^{1,p}(\Omega) \times L_2^p(\Omega)$ satisfait les relations :

$$-\nu \Delta \boldsymbol{w} + \nabla \tau = \boldsymbol{f} - \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\boldsymbol{w}_{|\partial\Omega} = -\boldsymbol{v}.$$

A ce titre, comme $\boldsymbol{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (*cf.* Théorème 5.1) et

$$\boldsymbol{f} - \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}) \in \mathbf{W}_2^{-1,p}(\Omega),$$

(voir le point (*ii*) de la preuve du Lemme 2.2) il est clair que $(\boldsymbol{w}, \tau)$ est l'unique solution donnée par le Théorème II.5.1 du problème de Stokes :

$$-\nu \Delta \boldsymbol{z} + \nabla \theta = \boldsymbol{f} - \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{z} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.16}$$

$$\boldsymbol{z}_{|\partial\Omega} = -\boldsymbol{v}. \tag{5.17}$$

ii) Il suffira alors pour conclure de montrer que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}) \in L_3^p(\Omega) \tag{5.18}$$

En effet, comme $\boldsymbol{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $\boldsymbol{f} \in L^p_3(\Omega)$, on aura

$$\boldsymbol{f} - \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}) \in L^p_3(\Omega), \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbf{W}^{1+1/p',p}(\partial\Omega).$$

Ainsi, compte tenu du point (i), on pourra appliquer le Théorème II.5.3 à la solution du problème (5.16), (5.17), (c'est-à-dire $(\boldsymbol{w}, \tau)$) ce qui établit d'une part que

$$(\boldsymbol{w}, \tau) \in \mathbf{W}^{2,p}_3(\Omega) \times W^{1,p}_3(\Omega)$$

et d'autre part que pour r assez grand :

$$\nabla \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = o(r^{-2-3/p}), \qquad \tau(\boldsymbol{x}) = o(r^{-2-3/p}).$$

iii) Reste finalement à prouver (5.18). Pour cela, on remarque tout d'abord que $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0$ dans Ω, de sorte que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{w}.$$

Par ailleurs, comme $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}$, il est clair que

$$\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^\infty_1(\Omega), \qquad \nabla \boldsymbol{v} \in L^\infty_2(\Omega).$$

En outre, comme $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}^{1,p}_2$ avec $p > 3$, on a aussi (voir en particulier la Proposition I.3.9) :

$$\boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^p_1(\Omega), \quad \nabla \boldsymbol{w} \in L^p_2(\Omega), \quad \boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^\infty_{1+3/p}(\Omega) \subset \mathbf{L}^\infty_1(\Omega).$$

Grâce à ces régularités, on montre avec l'inégalité de Hölder que

$$\| \boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^p_3(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{v} \|_{\mathbf{L}^\infty_1(\Omega)} \| \nabla \boldsymbol{w} \|_{L^p_2(\Omega)}, \qquad \| \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^p_3(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^\infty_1(\Omega)} \| \nabla \boldsymbol{w} \|_{L^p_2(\Omega)},$$

$$\| \boldsymbol{w}.\nabla \boldsymbol{v} \|_{\mathbf{L}^p_3(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{w} \|_{\mathbf{L}^p_1(\Omega)} \| \nabla \boldsymbol{v} \|_{L^\infty_2(\Omega)},$$

ce qui établit (5.18) et le théorème. $\diamondsuit$

Annexe : Preuve de la Proposition 2.4

Rappelons, avant de le démontrer, l'énoncé de la Proposition 2.4 :

Proposition *Soit* $\boldsymbol{h} \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^{0}_{-3}(\mathbb{R}^3)$*. Il existe un unique couple* $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1} \times \mathcal{M}^0_{-2}$ *tel que :*

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \nabla\eta = \boldsymbol{h}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

De plus, il existe une constante $C = C(\nu) > 0$ *telle que :*

$$\| \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}} + \| \eta \|_{\mathcal{M}^0_{-2}} \leq C \| \boldsymbol{h} \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)}.$$

Dans ce résultat, l'unicité de la solution est une conséquence directe de la remarque I.3.2, car les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{M}}^1_{-1}$ et $\mathcal{M}^0_{-2}$ sont des fonctions qui s'annulent à l'infini. L'existence et l'estimation sont en revanche plus délicates à prouver.

Commençons par un lemme élémentaire sur la convolution des fonctions homogènes.

Lemme A *Soient* $\gamma_1, \gamma_2 > -3$*,* $f_1 \in \mathcal{M}^0_{\gamma_1}$ *et* $f_2 \in \mathcal{M}^0_{\gamma_2}$*. Si* $\gamma_1 + \gamma_2 < -3$*, alors*

$$(f_1 * f_2)(\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^3} f_1(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}^0_{\gamma_1+\gamma_2+3},$$

avec

$$\| f_1 * f_2 \|_{\mathcal{M}^0_{\gamma_1+\gamma_2+3}} \leq C \| f_1 \|_{\mathcal{M}^0_{\gamma_1}} \| f_2 \|_{\mathcal{M}^0_{\gamma_2}},$$

où la constante C *ne dépend que de* γ_1 *et* γ_2*.*

Preuve : L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_1(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

a un sens pour tout $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ car $\gamma_1, \gamma_2 > -3$ et $\gamma_1 + \gamma_2 < -3$. Effectuons le changement de variable $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{y}|$, il vient :

$$(f_1 * f_2)(\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{y}|^{\gamma_1+\gamma_2+3} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{z}) f_2(\boldsymbol{z}) d\boldsymbol{z},$$

où l'intégrale ne dépend que de $\boldsymbol{y}'$ et vaut en particulier $(f_1 * f_2)(\boldsymbol{y}')$. Alors, en utilisant la forme (1.2), il est immédiat de montrer que :

$$|(f_1 * f_2)(\boldsymbol{y}')| \leq \| f_1 \|_{L^\infty(\Sigma)} \| f_2 \|_{L^\infty(\Sigma)} \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{z}|^{\gamma_1} |\boldsymbol{z}|^{\gamma_2} d\boldsymbol{z}.$$

d'où l'estimation, car l'intégrale figurant au second membre est invariante par rotation. $\Diamond$

Considérons alors $\boldsymbol{h} \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)$, *i.e.* $\boldsymbol{h} = \operatorname{div} H$ où $H \in \mathcal{M}^1_{-2}(\mathbb{R}^3)$ est un tenseur d'ordre 2. Par définition de la norme dans $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)$ (*cf.* (2.18)), on peut de plus choisir H tel que

$$\| H \|_{\mathcal{M}^1_{-2}} \leq 2\| \boldsymbol{h} \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}}. \tag{5.19}$$

Le tenseur H sera ainsi fixé dans toute la suite. Comme $\mathcal{M}^1_{-2}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{M}^0_{-2}(\mathbb{R}^3)$, le Lemme A permet d'introduire les distributions, pour $i = 1, 2, 3$:

$$v_i = \sum_{j,k=1}^{3} (\partial_k U_{ij}) * H_{kj} \quad \text{et} \quad \eta = \sum_{j,k=1}^{3} \partial_k (Q_j * H_{kj}). \tag{5.20}$$

En effet, comme $\partial_k U_{ij}$ et Q_j (voir Chapitre I, section 4.1) appartiennent clairement à $\mathcal{M}^0_{-2}$, on a $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^0_{-1}$ avec

$$\| \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^0_{-1}} \leq C\| H \|_{\mathcal{M}^0_{-2}}. \tag{5.21}$$

De même, on obtient que η la dérivée d'une fonction homogène de degré -1, *i.e.* une distribution homogène de degré -2.

Nous prouvons maintenant que le couple $(\boldsymbol{v}, \eta)$ donné par (5.20) vérifie les égalités :

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \nabla\eta = \operatorname{div} H, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \tag{5.22}$$

C'est une conséquence du résultat suivant où Λ désigne une fonction impaire, homogène de degré -2 et régulière en dehors de l'origine (C^∞, pour fixer les idées car on applique le lemme à ∇U et $\mathbf{Q}$, mais plus généralement $\Lambda \in \mathcal{M}^0_{-2}(\mathbb{R}^3)$).

Lemme B *Soit $H \in \mathcal{M}^0_{-2}$. Alors,*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), < \partial_i(\Lambda * H), \varphi >= \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i(\Lambda * \varphi)(\boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}. \tag{5.23}$$

Preuve : Par définition,

$$< \partial_i(\Lambda * H), \varphi >= -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \Lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \right) \partial_i \varphi(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y},$$

ce qui s'écrit aussi grâce au théorème de Fubini :

$$< \partial_i(\Lambda * H), \varphi >= -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \Lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \partial_i \varphi(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \right) H(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

Or, Λ étant impaire, il est clair que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \partial_i \varphi(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = -(\Lambda * \partial_i \varphi)(\boldsymbol{x}) = -\partial_i(\Lambda * \varphi)(\boldsymbol{x}). \qquad \diamondsuit$$

En utilisant le Lemme B avec $\Lambda = \partial_k U_{ij}$ et $\Lambda = Q_j$ dans les expressions données par (5.20), on obtient facilement (5.22) puisque (voir Chapitre I, Section 4.1)

$$-\nu\Delta U_{ij} + \partial_i Q_j = \delta_{ij}\delta, \qquad \sum_{j=1}^{3} \partial_i U_{ij} = 0.$$

Les égalités (5.22) étant établies, il reste pour démontrer la Proposition 2.4, à prouver l'estimation (2.20). Mais notons que l'on a déjà d'après (5.19) et (5.21) :

$$\| \boldsymbol{v} \|_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^0_{-1}} \leq C\| H \|_{\mathcal{M}^0_{-2}} \leq C\| H \|_{\mathcal{M}^1_{-2}} \leq C\| \boldsymbol{h} \|_{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^0_{-3}(\mathbb{R}^3)}.$$

Ainsi, compte tenu de (5.19), il suffit donc d'établir

$$\| \nabla \boldsymbol{v} \|_{\mathcal{M}^0_{-2}} + \| \eta \|_{\mathcal{M}^0_{-2}} \leq C\| H \|_{\mathcal{M}^1_{-2}} \tag{5.24}$$

Pour clarifier la preuve de cette estimation nous considérons comme ci-dessus une fonction $\Lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\})$, homogène de degré -2 et impaire (on choisira à nouveau $\Lambda = \partial_k U_{ij}$ ou $\Lambda = Q_j$ le cas échéant). Alors, on sait que pour $i = 1, 2, 3$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$:

$$\partial_i(\Lambda * \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} K_i^\varepsilon \varphi + \Lambda_{\Sigma,i}\varphi, \tag{5.25}$$

avec

$$K_i^\varepsilon \ : \ \varphi \mapsto \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|>\varepsilon} \partial_i \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}, \qquad \Lambda_{\Sigma,i} = \int_\Sigma \Lambda(\boldsymbol{x}')x_i' d\boldsymbol{x}'. \tag{5.26}$$

Posons de plus :

$$R_i^\varepsilon = K_i^\varepsilon \varphi - \lim_{\varepsilon \to 0} K_i^\varepsilon \varphi, \tag{5.27}$$

et prouvons le résultat préliminaire suivant :

Lemme C *Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ et $i = 1, 2, 3$. Alors, il existe un compact $K = K(\varphi)$ et une constante $C = C(\varphi) > 0$ tels que*

$$\forall \varepsilon \in]0,1], \qquad \operatorname{supp} R_i^\varepsilon \varphi \subset K, \quad \textit{et} \quad \| R_i^\varepsilon \varphi \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < C\varepsilon. \tag{5.28}$$

Preuve : Il est standard de vérifier, par "découpage" d'intégrale que

$$R_i^\varepsilon \varphi(\boldsymbol{x}) = \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\varepsilon} \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\partial_i\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} - \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\varepsilon} \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} + \Lambda_{\Sigma,i}\varphi(\boldsymbol{x}). \tag{5.29}$$

En particulier, il est clair que si $\varepsilon \in]0,1]$ alors,

$$\operatorname{supp} R_i^\varepsilon \varphi \subset \operatorname{supp}\varphi + \overline{B_\varepsilon} \subset \operatorname{supp}\varphi + \overline{B_1}.$$

Par ailleurs, comme Λ est homogène de degré -2 et régulière sur Σ, on a

$$|\int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\varepsilon} \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\partial_i\varphi(\boldsymbol{y})|d\boldsymbol{y} \quad < \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\varepsilon} |\Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}|\,\|\partial_i\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \tag{5.30}$$

$$< \varepsilon\|\,\Lambda\,\|_{L^1(B_1)}\|\partial_i\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}. \tag{5.31}$$

Quant aux deux autres termes, un simple calcul montre que :

$$\int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\varepsilon} \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{x_i-y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} - \Lambda_{\Sigma,i}\varphi(\boldsymbol{x}) = \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\varepsilon} \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{x_i-y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}(\varphi(\boldsymbol{y})-\varphi(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{y}.$$

Comme $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \varepsilon$, le théorème des accroissements finis appliqué à φ entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ permet d'en déduire que

$$|\int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\varepsilon} \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{x_i-y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} - \Lambda_{\Sigma,i}\varphi(\boldsymbol{x})| \leq \varepsilon|\Lambda_{\Sigma,i}|\|\nabla\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^3)}. \tag{5.32}$$

Ainsi, (5.29), (5.31) et (5.32) entraînent par inégalité triangulaire la majoration uniforme de R_i^ε. $\diamondsuit$

Nous démontrons finalement l'estimation (5.24) sous une forme plus générale.

Proposition D *Soit $\Lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\})$, une fonction impaire, homogène de degré -2 et $H \in \mathcal{M}^1_{-2}$. Alors, $\nabla(\Lambda * H) \in \mathcal{M}^0_{-2}$ avec l'estimation :*

$$\|\,\nabla(\Lambda * H)\,\|_{\mathcal{M}^0_{-2}} \leq C\|\,H\,\|_{\mathcal{M}^1_{-2}}. \tag{5.33}$$

Preuve :

i) D'après le Lemme A, $\Lambda * H$ est une fonction homogène de degré -1 de sorte que $\nabla(\Lambda * H)$ est une distribution homogène de degré -2. Par conséquent, pour établir la proposition, il suffit de prouver l'inégalité :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{C}), \quad |<\partial_i(\Lambda * H), \varphi>| \leq C\|\,H\,\|_{\mathcal{M}^1_{-2}}\|\,\varphi\,\|_{L^1(\mathcal{C})}, \quad i = 1,2,3, \tag{5.34}$$

où $\mathcal{C}$ désigne par exemple la couronne : $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\, 3/4 < |\boldsymbol{x}| < 2\}$.

ii) D'après (5.23) et (5.25), on a

$$<\partial_i(\Lambda * H), \varphi> = \Lambda_{\Sigma,i}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^3}(\lim_{\varepsilon\to 0}(K_\varepsilon^i\varphi)(\boldsymbol{x}))H(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

De plus, comme H appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, le Lemme C permet d'intervertir le signe somme et la limite dans le membre de droite, c'est-à-dire que :

$$<\partial_i(\Lambda * H), \varphi> = \Lambda_{\Sigma,i}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon, \tag{5.35}$$

où l'on a posé :

$$I_\varepsilon = \iint_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|>\varepsilon} \partial_i \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}. \tag{5.36}$$

Comme φ appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ et H est borné sur $\mathcal{C}$, on montre immédiatement que :

$$|\Lambda_{\Sigma,i}\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}| \leq C(\Lambda)\| H \|_{L^\infty(\Sigma)} \| \varphi \|_{L^1(\mathcal{C})} \tag{5.37}$$

Reste à estimer $\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon$. Pour cela, nous montrons que les intégrales I_ε sont uniformément majorées pour ε petit. En particulier, nous introduisons la partition de l'unité $\psi_1 + \psi_2 = 1$ sur $\mathbb{R}^3$ avec :

$$0 \leq \psi_1, \psi_2 \leq 1, \quad \psi_2 = 1 \text{ sur } B_{1/4} \quad \text{et} \quad \mathrm{Supp}(\psi_2) \subset B_{1/2},$$

qui va nous permettre de bien distinguer la singularité de Λ et celle de H. En particulier, on décompose l'intégrale I_ε donnée par (5.36) en

$$I_\varepsilon = I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 \tag{5.38}$$

$$I_\varepsilon^m = \iint_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|>\varepsilon} \partial_i \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\psi_m(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}, \quad m = 1, 2.$$

iii) estimation de I_ε^1 : Supposons à partir de maintenant et sans perdre de généralité que $\varepsilon < 1/4$. Comme $\operatorname{supp}\psi_1 \cap B_{1/4} = \emptyset$, il est clair que $I_\varepsilon^1 = I_{1/4}^1$ et il vient grâce au théorème de Fubini :

$$I_\varepsilon^1 = \int_{\mathcal{C}} \left(\int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|>1/4} \partial_i \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\psi_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \right) \varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}. \tag{5.39}$$

Posons pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}$:

$$J(\boldsymbol{y}) = \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|>1/4} \partial_i \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\psi_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

Alors, on a

$$|J(\boldsymbol{y})| \leq \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|>1/4} |\partial_i \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{y}|^{-2} \int_{|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}'|>|\boldsymbol{y}|/4} |\partial_i \Lambda(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}')H(\boldsymbol{z})|d\boldsymbol{z},$$

où l'on a effectué le changement de variables $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{y}|$. Sachant que $3/4 < |\boldsymbol{y}| < 2$, on en déduit de plus que

$$|J(\boldsymbol{y})| \leq \frac{16}{9} \| \partial_i \Lambda \|_{L^\infty(\Sigma)} \| H \|_{L^\infty(\Sigma)} \int_{|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}'|>\frac{3}{16}} \frac{d\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}'|^3 |\boldsymbol{z}|^2}.$$

L'intégrale figurant au second membre étant finie et indépendante de $\boldsymbol{y}'$ (car invariante par rotation), on obtient finalement :

$$\forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{C}, \qquad |J(\boldsymbol{y})| \leq C(\Lambda) \| H \|_{L^\infty(\Sigma)}. \tag{5.40}$$

Ainsi, on déduit de (5.39) et (5.40) que

$$\begin{aligned} \forall \;\; 0 < \varepsilon < 1/4, \;\; |I_\varepsilon^1| \;&\leq\; \int_{\mathcal{C}} |J(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})| d\boldsymbol{y}, \\ &\leq C(\Lambda) \| H \|_{L^\infty(\Sigma)} \| \varphi \|_{L^1(\mathcal{C})}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

<u>*iv)* estimation de I_ε^2 :</u> L'intégrale I_ε^2 s'écrit aussi :

$$I_\varepsilon^2 = \int_{\mathcal{C}} \left(\int_{\varepsilon < |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < 1/2} \partial_i \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \psi_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \right) \varphi(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}. \tag{5.42}$$

Notons que pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}$, la fonction $\psi_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x})$ est à support compact et appartient à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$. En effet, si $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}$ alors

$$|\boldsymbol{y}| > 3/4, \; |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < 1/2 \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{x}| > 1/4,$$

c'est-à-dire que $\mathbf{0} \notin \operatorname{supp} \psi_2(.-\boldsymbol{y})$. Supposons à nouveau $\varepsilon < 1/4$, alors, une intégration par parties donne :

$$\int_{\varepsilon < |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < 1/2} \partial_i \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \psi_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} =$$

$$- \int_{\varepsilon < |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < 1/2} \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \partial_i (\psi_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x})) d\boldsymbol{x} + \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \varepsilon} \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x}) \frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} d\boldsymbol{x}. \tag{5.43}$$

En utilisant l'homogénéïté de Λ et H, on majore la seconde intégrale de la manière suivante :

$$\left| \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \varepsilon} \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x}) \frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} d\boldsymbol{x} \right| \leq C \| \Lambda \|_{L^\infty(\Sigma)} \| H \|_{L^\infty(\Sigma)}. \tag{5.44}$$

Quant à la première, elle est par inégalité triangulaire majorée par la somme de deux intégrales :

$$\left| \int_{\varepsilon < |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < 1/2} \Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \partial_i (\psi_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x})) d\boldsymbol{x} \right| \leq J_1(\boldsymbol{y}) + J_2(\boldsymbol{y}), \tag{5.45}$$

avec

$$J_1(\boldsymbol{y}) = \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < 1/2} |\Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \partial_i \psi_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \, H(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x},$$

$$J_2(\boldsymbol{y}) = \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < 1/2} |\Lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \psi_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \, \partial_i H(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x}.$$

Alors, grâce aux propriétés de support de ψ_2, on obtient facilement pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}$:

$$J_1(\boldsymbol{y}) \leq C\| \Lambda \|_{L^\infty(\Sigma)} \| H \|_{L^\infty(\Sigma)} \quad \text{et} \quad J_2(\boldsymbol{y}) \leq C\| \Lambda \|_{L^\infty(\Sigma)} \| \partial_i H \|_{L^\infty(\Sigma)} \tag{5.46}$$

En utilisant (5.42), (5.43) et les majorations (5.44), (5.45), (5.46), il vient aisément

$$\forall 0 < \varepsilon < 1/4, \quad |I_\varepsilon^2| \leq C\| \Lambda \|_{L^\infty(\Sigma)}(\| H \|_{L^\infty(\Sigma)} + \| \partial_i H \|_{L^\infty(\Sigma)})\| \varphi \|_{L^1(\mathcal{C})} \tag{5.47}$$

v) On déduit alors de (5.38),(5.37) et (5.41) que

$$\forall \;\; 0 < \varepsilon < 1/4, \quad |I_\varepsilon| \leq C(\Lambda)(\| H \|_{L^\infty(\Sigma)} + \| \partial_i H \|_{L^\infty(\Sigma)})\| \varphi \|_{L^1(\mathcal{C})}.$$

Par conséquent, il vient

$$|\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon| \leq C(\Lambda)(\| H \|_{L^\infty(\Sigma)} + \| \partial_i H \|_{L^\infty(\Sigma)})\| \varphi \|_{L^1(\mathcal{C})}. \tag{5.48}$$

Ainsi, grâce à (5.35), on déduit trivialement de (5.48) et (5.37) donnent l'estimation (5.34), soit le résultat $\diamondsuit$

Remarque : Telle qu'elle est énoncée, la Proposition D n'est pas optimale. Tout d'abord, il n'est pas nécessaire de supposer que Λ est une fonction impaire, le résultat restant vrai sans cette hypothèse avec une preuve très similaire (on introduit la fonction $\check{\Lambda}(\boldsymbol{x}) = \Lambda(-\boldsymbol{x})$ dans le Lemme A, et on travaille ensuite avec $\check{\Lambda}$ au lieu de Λ). De plus, on peut en fait, en étant un peu plus précis dans l'estimation des constantes montrer plus généralement que :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{M}^1_{-2}, H \in \mathcal{M}^1_{-2}, \quad \| \partial_i(\Lambda * H) \|_{\mathcal{M}^0_{-2}} \leq C\| \Lambda \|_{\mathcal{M}^1_{-2}} \| H \|_{\mathcal{M}^1_{-2}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

soit encore compte tenu du Lemme A :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{M}^1_{-2}, H \in \mathcal{M}^1_{-2}, \quad \| \Lambda * H \|_{\mathcal{M}^1_{-1}} \leq C\| \Lambda \|_{\mathcal{M}^1_{-2}} \| H \|_{\mathcal{M}^1_{-2}}.$$

Bibliographie

[1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic press, New York, 1975.

[2] C.J. Amick. On steady Navier-Stokes flow past a body in the plane. In Amer. Math. Soc., editor, *Proc. Symposia Pure Math.*, volume 43, pages 37–50, 1986.

[3] C.J. Amick. On Leray's problem of steady Navier-Stokes flow past a body in the plane. *J. Diff. Equations*, 161(71-130), 1988.

[4] C. Amrouche, V.Girault. Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimensions. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 44(119):109–140, 1994.

[5] C. Amrouche, V.Girault, J.Giroire. Weighted Sobolev spaces for the Laplace equation in $\mathbf{R}^n$. *J. Math. Pures et Appliquées*, 20:579–606, 1994.

[6] C. Amrouche, V.Girault, J.Giroire. Dirichlet and Neumann exterior problems for the n-dimensional Laplace operator. An approach in weighted Sobolev spaces. *J. Math. Pures et Appliquées*, 76(1):55–81, 1997.

[7] K.I. Babenko. On stationary solutions of the problem of flow past a body of a viscous incompressible fluid. *Math SSSR Sbornik*, 20:1–25, 1973.

[8] I. Babuska. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numer. Math.*, 20:179–192, 1973.

[9] F. Bethuel, J.M.Ghidaglia. Sharp L^∞ estimates for the 2D-Stokes operator. *Differential and integral equations*, 9(1):1–9, 1996.

[10] W. Borchers, T.Miyakawa. Algebraic L^2 decay for Navier-Stokes flows in exterior domains. *Acta Math.*, 165:189–227, 1990.

[11] W. Borchers, T.Miyakawa. On some coercive estimates for the Stokes problem in unbounded domains. In Springer-Verlag, editor, *Navier-Stokes equations : Theory and numerical methods*, volume 1530, pages 71–84. Heywood J.G.; Masuda K.;Rautmann R.; Solonnikov V.A.; Lecture Notes in Mathematics, 1992.

[12] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, 1992.

[13] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle points problems arising from Lagrange multipliers. *R.A.I.R.O., Ana. Num.*, R2:129–151, 1974.

[14] M. Cantor. Spaces of functions with asymptotic conditions on $\mathbb{R}^n$. *Indiana Univ. Math. J.*, 9(24):897–902, 1975.

[15] I-Dee Chang, R. Finn. On the solutions of a class of equations occuring in continuum mechanics, with application to the Stokes paradox. *Arch. for Rat. Mech. Anal.*, 7:388–401, 1961.

[16] J.Y. Chemin. *Fluides parfaits incompressibles*, volume 230. Soc. Mat. de France;Asterisque, 1995.

[17] R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes. Compensated compactness and Hardy spaces. *J. Maths Pures et Appliquées*, 72(3):247–286, 1993.

[18] R. Coifman, Y. Meyer. *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, volume 57 of *Astérisque*. Société Math. de France, 1978.

[19] G. de Rham. *Variétés differentiables*. Hermann, 1960.

[20] R. Farwig. The stationary exterior 3D-Problem of Oseen and Navier-Stokes Equations in anisotropically weighted Sobolev spaces. Preprint, Universität Paderborn, 1991.

[21] R. Finn. On the steady-state solutions of the Navier-Stokes equations. *Acta Math.*, 3:197–244, 1961.

[22] R. Finn. On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations and associated perturbation problems. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 19:363–406, 1965.

[23] R. Finn. Stationary solutions of the Navier-Stokes equations. In Amer. Math. Soc., editor, *Proc. Symp. Appl. Math.*, volume 19, 1965.

[24] R. Finn, D.R. Smith. On the stationary solution of the Navier-Stokes equations in two dimensions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 25:26–39, 1967.

[25] G.P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*, volume II. Springer tracts in natural philosophy, 1994.

[26] G.P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*, volume I. Springer tracts in natural philosophy, 1994.

[27] G.P. Galdi, C.G.Simader. Existence uniqueness and L^q-estimates for the Stokes problem in an exterior domain. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 112:291–318, 1990.

[28] G.P. Galdi, C.G.Simader. New estimates for the steady-state Stokes problem in exterior domains with applications to the Navier-Stokes problem. *Diff. and Integral equations*, 7:847–861, 1994.

[29] J. Garcia-Cuerva, J.L.Rubio de Francia. *Weighted norms inequalities and related topics.* Noth-Holland, Amsterdam, 1985.

[30] D. Gilbarg, H.F. Weinberger. Asymptotic properties of steady-plane solutions of the Navier-Stokes equations with bounded Dirichlet integral. *Ann. Scuola Norm. Pisa*, 5(4):381–404, 1978.

[31] V. Girault. The gradient, curl and Stokes operators in weighted Sobolev spaces of $\mathbf{R}^n$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 39:279–307., 1992.

[32] V. Girault, A.Sequeira. A well posed problem for the exterior Stokes equations in two and three dimensions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 114:313–333, 1991.

[33] J. Giroire. Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales. Thèse de doctorat d'état, Université Paris VI, 1987.

[34] P. Grisvard. *Elliptic problem in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and studies in Math.* Pitman, 1985.

[35] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids- Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace. *Rend. del Sem. Mat. della Univ. di Padova*, XLVI:227–272, 1971.

[36] G. H. Hardy, J.E.Littlewood, G.Polya. *Inequalities.* Cambridge, 3^{rd} edition, 1959.

[37] J.G. Heywood. On some paradoxes concerning two dimensional Stokes flow past an obstacle. *Indiana University Math. Journal*, 24(5):443–450, 1974.

[38] J.G. Heywood. The Navier-Stokes equations : On the existence, regularity and decay of solutions. *Indiana Univ. Math. J.*, 29(5):639–681, 1980.

[39] H. Kozono, H.Sohr. New a priori estimates for the Stokes equations in exteriors domains. *Indiana Univ. Math. J.*, 40:1–25, 1991.

[40] H. Kozono, H.Sohr. Density properties for solenoidal vector fields with application to the Navier-Stokes equations in exterior domains. *J. Math. Soc. Japan*, 44(2), 1992.

[41] H. Kozono, H.Sohr. On a new class of generalized solutions for the Stokes equations in exterior domains. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. IV*, 19:155–181, 1992.

[42] H. Kozono, H.Sohr. On stationary solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains. *Ricerce di Matematica*, XLII(1):69–86, 1993.

[43] H. Kozono, T.Ogawa. Some L^p estimate for the exterior Stokes flow and an application to the non-stationary Navier-Stokes equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 41(3), 1992.

[44] L.D. Kudrjavcev. Direct and inverse imbeddings theorems. application to the solution of elliptic equation by variationnal method. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 55:1–182, 1959.

[45] A. Kufner. *Weighted Sobolev Spaces*. Wiley, Chichester, 1985.

[46] O.A. Ladyzhenskaya. *Mathematical theory of viscous incompressible flow*. Gordon and Breach, second edition, 1969.

[47] J. Leray. Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *J. Maths Pures et Appliquées*, 12:1–82, 1933.

[48] J. Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, 63:193–248, 1934.

[49] M.N. Leroux. Résolution numérique du problème du potentiel dans le plan par une méthode variationnelle d'éléments finis. Master's thesis, Thèse de troisième cycle, Université de Rennes, 1974.

[50] J.L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Gauthier-Vilars, 1969.

[51] P.L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol.I : Incompressible models*. Oxford Sciences Publications, 1996.

[52] R.B. Lockhart, R.C.McOwen. On elliptic systems in $\mathbb{R}^n$. *Acta Mathematica*, 150:125–135, 1983.

[53] R.C. McOwen. The behaviour of the laplacian on weighted Sobolev spaces. *Comm. on Pure and Applied Math.*, XXXII:783–795, 1979.

[54] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs II : Opérateurs de Calderòn-Zygmund*. Hermann, 1990.

[55] L. Nirenberg. On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 13:116–162, 1959.

[56] J.C. Nedelec;J. Planchard. Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème dans $\mathbb{R}^3$. *R.A.I.R.O., Anal. Numér.*, R3:105–129, 1973.

[57] L. Schwartz. *Théorie des distributions.* Hermann, 1966.

[58] P. Secchi. On the stationary and nonstationary Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$. *Annali di Mat. Pura e Appl.*, 153:293–306, 1988.

[59] J. Simon. Representations of distributions and explicit antiderivatives up to the boundary. In M. Chipot, editor, *Progress in P.D.E. : The Metz surveys*, pages 201–215. Longman, 1993.

[60] D.R. Smith. Estimates at infinity for the stationary Solutions of the Navier-Stokes equations in two dimensions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 20:341–372, 1965.

[61] M. Specovius Neugebauer. Exterior Stokes problems and decay at infinity. *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, 8:351–367, 1986.

[62] M. Specovius Neugebauer. Weak Solutions of the Stokes Problem in Weighted Sobolev Spaces. *Acta Applicandae Mathematicae.*, 37:195–203, 1994.

[63] M. Specovius Neugebauer. The two-dimensional exterior Stokes problem, existence, regularity and decay properties. *Math. Methods Appl. Sci.*, 19(7):507–528, 1996.

[64] E.M. Stein. *Harmonic Analysis : real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[65] L. Tartar. *Topics in non linear analysis.* Publications mathématiques d'Orsay, 1978.

[66] R. Temam. *Navier-Stokes equations.* North-Holland, Amsterdam- New-York - Tokyo, 1977.

[67] A. Torchinsky. *Real-variable methods in harmonic analysis.* Academic press, 1986.

[68] W. Varnhorn. The Poisson equation with weights in exterior domains of $\mathbb{R}^n$. *Applicable Analysis*, 43:135–145, 1992.

[69] W. Varnhorn. On strong solutions of the Stokes Equations in exterior domains. *Acta Appl. Math.*, 37:205–214, 1994.